

立体的な結晶折り紙について

川崎 敏 和

On solid crystallographic origamis

T. Kawasaki

佐世保工業高等専門学校研究報告 第24号抜刷

1987

昭和62年12月25日発行

佐世保工業高等専門学校

857-11 佐世保市沖新町1-1

立体的な結晶折り紙について*

川崎 敏 和**

1. 序 文

折り紙を数学的に取り扱った研究は数多くあるが、そのほとんどが数学教育の手段として折り紙を利用したものである([3], [4], [5], [6], [10]). 折り紙を幾何学の対象として研究したのは、[7]が最初であり、その中で平坦に折りたためられる折り紙の折り線の構造が調べられた。しかし、[7]では「折り紙」の数学的な定義がないまま、折り線に関する多くの性質が分析されている。明確な「折り紙」の定義は、吉田正章氏によって、ある条件を満たすユークリッド平面の胞体分割という形で与えられた。[8]では、この定義を出発点として、[7]の結果を含む折り線の性質が導びかれている。

平坦折り紙 K の面 σ に対して、面 σ に向って平面全体を引き寄せるように折りたたむ区分的等距離写像 $[\sigma]$ を、鏡映変換の積を組み合わせて構成したが、この写像は折る前と折った後を対応させるものであって折っていく過程については何も触れていない([8]).

実際に紙を折るとき、折り線を山折りか谷折りしなくてはならないが、「ひとつの頂点から出る山折り線と谷折り線の数の差は2である」という最も基本的な事実すら、明確な「折る過程」の定義を基に導びかれたものではなかった。

本稿の目的のひとつは、折っていく過程に現れる立体的な折り紙の定義を与え、平坦折り紙の場合に得られた結果に対応するものを導くことである(第2章)。

[8]で $p4$ 型の結晶群の作用で不変な B_2 -折り紙(各頂点に4本の折り線が集まり、頂点の周りの4つの角が $\pi/2, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4$ となる平坦折り紙)を組織的に構成する方法を与えた。しかし、この方法では、 B_2 -折り紙やこれに類するものしか構成できない。第3、4章では、[7]の折り線と三角形の内心との関係を発展させ、 B_2 -折り紙とは異なるタイプの平坦折り紙の構成方法を導びく。

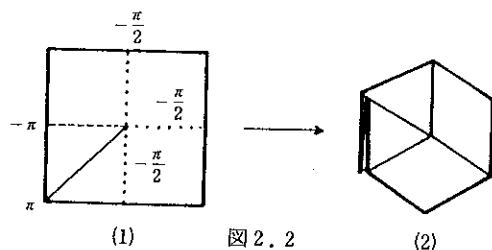
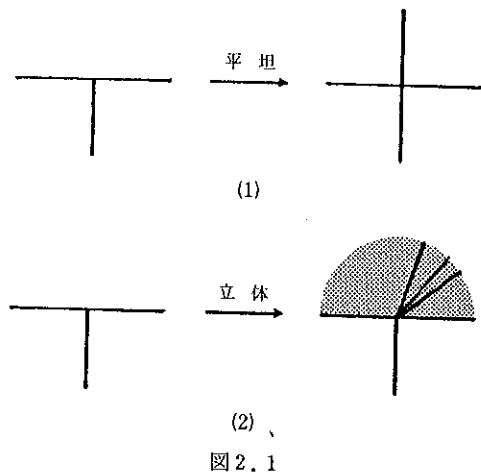
最後に、付録として、結晶折り紙の折り方を説明する。

2. 立体折り紙

立体的な折り紙の定義を与える前に、実際に紙を折って、立体的な折り紙の性質を確認する。

2.1 立体折り紙の折り線と折る角度の関係

点 O を端点に持つ3本の半直線がある。これにもう1本半直線を加え、4本の線に折り目を付けて紙を平坦に折りたたむ。[7]により、第4の折り線は3通りしか引けない。しかし、平坦に折りたたむのであれば、その可能性は無数にある(図2.1)。紙を平坦に折りたたむと、折り線をささむ2つの面のなす角度は0となる。つまり、折り線を回転の軸として、一方の面が π 回転して他方に重なる。しかし、平坦に折りたたむのでなければ、回転角の大きさの変化にとまらぬ、第4の折り線の位置が変えられる。



平坦折り紙の場合、頂点に集まる折り線の数は4本以上の偶数であることが必要である。これは、平坦折り紙の定義から容易に導びかれる。しかし、平坦でなければ、この制約はなくなる。つまり、5、7本であっ

*原稿受付 昭和62年9月16日

**佐世保工業高等専門学校一般科目

ても構わない。例えば、図 2.2(1)を折ると(2)のようになる。ただし、折り線の側の数はその折り線をはさむ 2 つの面を折る角度を表す。この値が正のときが山折り、負のときが谷折りである。

平坦に折りたたまない場合、折り線の数の制約は、4 本以上という事だけである。しかし、折り線の数、位置、それと折る角度の間には、一定の関係がある。図 2.3(1)の様な折り線に沿って紙を折るとき ℓ を折る角度を決めると、残り 3 本の線を折る角度は一意に決まる。なぜならば、 ℓ を角度 θ 谷折りすると、面 σ を基準にして、点 O, B, D の位置は一意に定まる。BC, DC, OC の長さは定まってい、三角形 BOD も定まっているので、脚のつく位置を決めて三脚を立てるように、点 C は三角形 BCD を含む平面の両側の対称な位置にひとつずつ定まる (図 2.3(2))。しかし、一方の点は、紙の不透過性のため、実現できない。点 C の位置が決まると、各面の位置が定まるので、面のなす角度つまり折る角度は決まる。

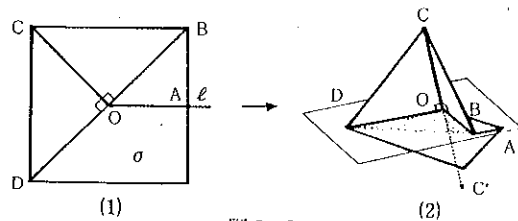


図 2.3

2.2 立体的な折り紙の定義

平坦折り紙を特別な場合として含む立体的な折り紙、立体的な結晶折り紙の定義及び基本的な性質を考察する。以下、「立体」は省略することにする。平坦を強調する場合には、必ず「平坦」あるいは「平面」をつけることにする。

$X, Y = X \times R, I_{\text{som}}(X), I_{\text{som}}(Y)$ はそれぞれ、ユークリッド平面、ユークリッド空間、 X, Y の等距離変換群を表し、演算は右から行なう。

X 内の有向線分または半直線 ℓ と与えられた角度 $\theta (-\pi \leq \theta \leq \pi)$ に対して、 $R(\ell; \theta)$ で、 ℓ を回転軸とし、右ねじの向きに空間 Y を角度 θ 回転させる変換を表す。

X の局所有限な胞体分割 K と K の 1 次元胞体 (辺) の集合 K_1 から閉区間 $[-\pi, \pi]$ への写像 $\theta: K_1 \rightarrow [-\pi, \pi]$ の組 $(K; \theta)$ に対して、辺に向きを付けた K の細分 K^* を次の様に構成する (図 2.4)。

(i) K^* の 0 次元胞体 (頂点) は K の頂点と K の辺の中点である。

(ii) K^* の辺は K_1 をなす半直線と (i) の中点によって二分された線分である。

(iii) K^* の辺の向きは、 K の頂点方向とする。

写像 $\theta: K_1 \rightarrow [-\pi, \pi]$ から K^* の辺に自然に透導される写像を同じ記号 θ で表す。すなわち、 K^* の辺 ℓ_1, ℓ_2 が K の線分 ℓ を二分したものであるとき、

$$\theta(\ell_1) = \theta(\ell_2) = \theta(\ell)$$

とする。

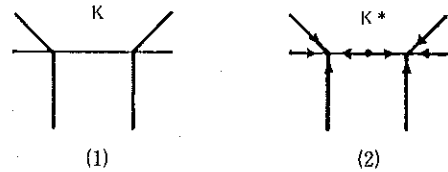


図 2.4

定義 2.1 (折り紙) X の胞体分割 K と K の全ての辺の集合 K_1 から閉区間 $[-\pi, \pi]$ への写像 θ の組 $(K; \theta)$ が折り紙であるとは、

(i) K は X の局所有限な胞体分割である。

(ii) K^* の頂点を通らず、辺 $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$ を順に、 ℓ_1 が左向きになるように横切る閉曲線 γ に対して、

$$R(\ell_1; \theta(\ell_1)) R(\ell_2; \theta(\ell_2)) \cdots R(\ell_n; \theta(\ell_n)) = 1$$

を満たすときに言う。

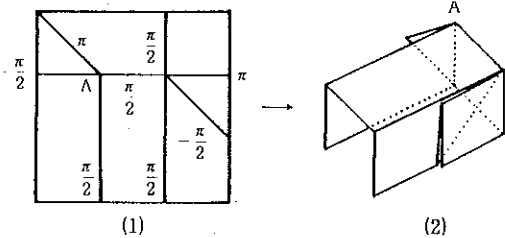


図 2.5

例 2.2 図 2.5(1)の $(K; \theta)$ は折り紙で、(2)はこれを折ったものである。図 2.6(1)の様に、点 A の周りを反時計回りに一周する円 γ に対して、

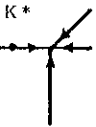
$$R(\ell_1; \frac{\pi}{2}) R(\ell_2; -\frac{\pi}{2}) R(\ell_3; \pi) R(\ell_4; -\frac{\pi}{2})$$

の逆の作用を面 σ の動きで表すと図 2.6(2)–(6)の様になり、面 σ に対する作用は恒等的であることがわかる。これは、回転を行列で表し、行列の積を計算してもわかる。図 2.7 の様な回転角 θ の回転 $R(\ell; \theta)$ を表す行列は、

$$\begin{pmatrix} \cos\theta \sin^2\omega + \cos^2\omega & (1-\cos\theta)\sin\omega\cos\omega & -\sin\theta\sin\omega \\ (1-\cos\theta)\sin\omega\cos\omega & \cos\theta\cos^2\omega + \sin^2\omega & \sin\theta\cos\omega \\ \sin\theta\sin\omega & -\sin\theta\cos\omega & \cos\theta \end{pmatrix}$$

となるので、回転の合成は、点 A を原点、 ℓ_1, ℓ_2 をそれぞれ x 軸、 y 軸とすると、

方向とする。
 面に自然に透導
 わち、 K^* の辺
 あるとき、



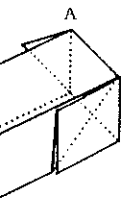
(2)

折紙 K と K の全
 の写像 θ の組

である。

$\ell_1, \dots, \ell_n$ を順
 なる閉曲線 γ に

$\ell_n; \theta(\ell_n)=1$



(2)

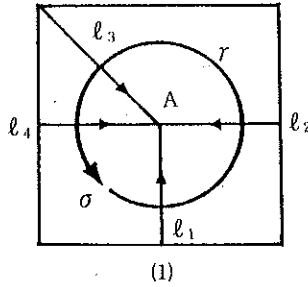
紙で、(2)はこ
 と、点Aの周り

$[-\frac{\pi}{2}$

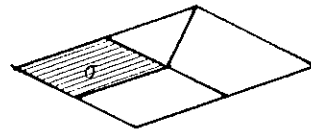
6(2)―(6)の様
 ることがわか
 を計算しても
 $R(\ell; \theta)$ を表

$\sin\theta\sin\omega$
 $\sin\theta\cos\omega$
 $\cos\theta$

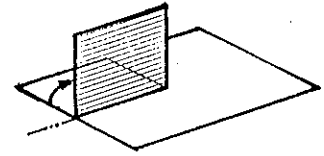
ℓ_1, ℓ_2 をそ



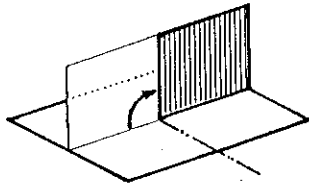
(1)



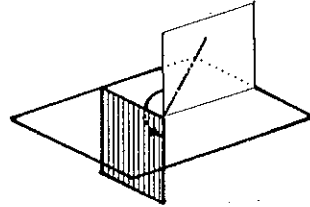
(2)



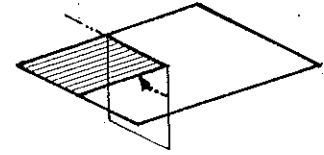
(3)



(4)



(5)



(6)

図 2. 6

になるように横切るとき、

$$[\sigma, \sigma'] = R(\ell_1; \theta(\ell_1))R(\ell_2; \theta(\ell_2)) \cdots R(\ell_m; \theta(\ell_m))$$

で、 $[\sigma, \sigma'] \in I_{som}(Y)$ を定義する。

道 γ は、 K の各頂点の周りを反時計回りに一周する
 小さな円に沿って行けば得られる (図 2. 8)。

$[\sigma, \sigma']$ が道 γ のとり方に依らないことは、折り紙の
 定義(ii)により保障される。つまり、図 2. 8 の道 γ と γ'
 による $[\sigma, \sigma']$ の違いは道 γ'' に依るが、 γ'' が横切る線
 分についての回転の積は、定義 2. 1(ii)より恒等変換な
 ので、 γ, γ' どちらで $[\sigma, \sigma']$ を定義しても同じである。

定義 2. 4 (折りたたみ写像) 折り紙 $(K; \theta)$ の
 任意の面 σ に対して、折りたたみ写像 $[\sigma]: X \rightarrow Y$
 を、 x が面 σ 内の点であるとき、

$$[\sigma](x) = [\sigma, \sigma'](x)$$

で定義する。

$[\sigma, \sigma'] \in I_{som}(Y)$ であるから、 $[\sigma]$ は X から Y の中

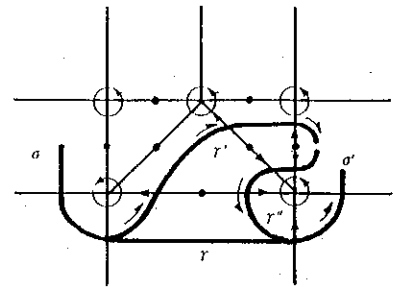


図 2. 8

となる。定義 2. 1において、 θ の値が $-\pi$ か π であれ
 ば、折り紙 $(K; \theta)$ は平坦折り紙である。なぜならば、

$$R(\ell_i; \pm\pi)|_X = R(\ell_i)$$

であり、折り紙の定義(ii)より、左辺の積は 1 である
 から右辺の積も $1 \in I_{som}(X)$ となるからである。

折り紙 $(K; \theta)$ に対して、 $\theta(\ell) = -\pi, \pi$ となる辺 ℓ
 をそれぞれ谷折り線、山折り線と呼ぶことは自然である。
 また、この呼び方を拡張して、 θ の値が負、正のとき、
 それぞれ、谷折り線、山折り線と呼んでもよいであろう。

定義 2. 3 折り紙 $(K; \theta)$ に対して、 K^* の面 σ 内
 の点から面 σ' 内の点への有向曲線 (以下、道と呼ぶ)
 γ が K^* の有向辺 $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m$ を順に、 ℓ_1 が左向き

への区分的等距離写像である。面 σ を固定して、平面 X を面 σ に引き寄せるように折ったとき、折る前と折った後を対応させる写像が $[\sigma]$ であることは、平坦折り紙の場合と同じである。もちろん、

$$[\sigma, \sigma'] = [\sigma, \sigma'] [\sigma', \sigma'],$$

$$[\sigma'] = [\sigma', \sigma] [\sigma]$$

も成立する。

2.3 結晶折り紙

$g \in I_{\text{som}}(X)$ に対して、折り紙 $(K; \theta)$ が g -不変であるとは、

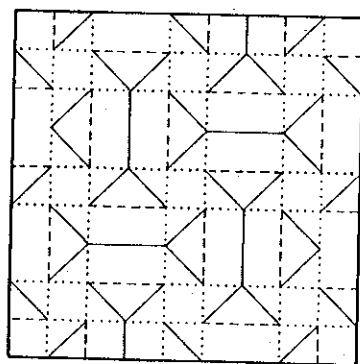
- (i) K は g -不変である。
- (ii) K の任意の辺 ℓ に対して、 $\theta(g\ell) = \theta(\ell)$ を満たすときに言う。

定義 2.5 折り紙 $(K; \theta)$ を不変とする 2 次元結晶群が存在するとき、結晶折り紙と言う。

結晶折り紙の例を挙げる。図 2.9 は $p4g$ 型の結晶群の作用で不変な折り紙の一部を切り取ったものである。中央の面 σ を固定して、 $[\sigma]$ で折りたたむと、図 2.10(1) になる。(2) はこれを裏返したものである。

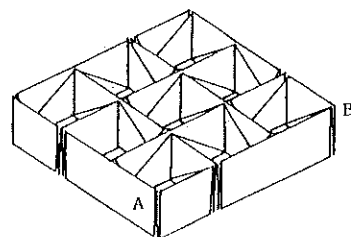
平面結晶折り紙を折った後、紙全体を引っぱって均一に広げると立体的な結晶折り紙になる。しかし、図 2.9 の結晶折り紙はこうにして作られたものではない。折り線が 5 本出ている頂点があることから明らかである。

$(K; \theta)$ を Γ -不変な結晶折り紙とする。 K の面 σ と Γ の元 g に対して、 g の K への作用を、 $[\sigma]$ で折る前と後で比較しよう。 K の任意の面 τ に対して、 $[\sigma](\tau)$ と

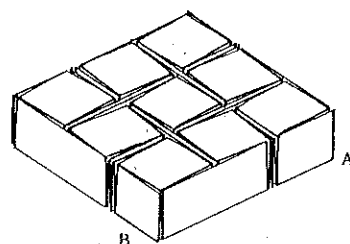


実線は π , 破線は $-\pi$, 点線は $-\frac{\pi}{2}$

図 2.9



(1)



(2)

図 2.10

$[\sigma](g\tau)$ の関係は図 2.11 のようになるから、折った後の g に対応する作用を $\varphi_\sigma(g)$ で表すと、

$$\varphi_\sigma(g)([\sigma](\tau)) = [\sigma](g\tau)$$

でなければならない。 $[\sigma]$ の定義より、

$$\varphi_\sigma(g)[\sigma, \tau](\tau) = [\sigma, g\tau](g\tau)$$

であるから、 τ に制限すると、

$$\varphi_\sigma(g) = [\sigma, g\tau]g[\sigma, \tau]^{-1}$$

となることが必要である。この等式において、 $[\sigma, g\tau]$, $[\sigma, \tau]^{-1}$ は空間 Y の回転であるから、 $g \in I_{\text{som}}(X)$ との積は厳密には無意味である。しかし、

$$g(x, y, z) = (g(x, y), z)$$

と考へ、 $g \in I_{\text{som}}(Y)$ とみなすと意味を持つ。以下、必要に応じて、 $g \in \Gamma$ を $I_{\text{som}}(X)$ や $I_{\text{som}}(Y)$ で考える。では、 $[\sigma, g\tau]g[\sigma, \tau]^{-1}$ を計算しよう。まず、

$$[g\sigma, g\sigma'] = g[\sigma, \sigma']g^{-1}$$

を示す。面 σ から面 σ' への道 γ に対して、 g が鏡映や

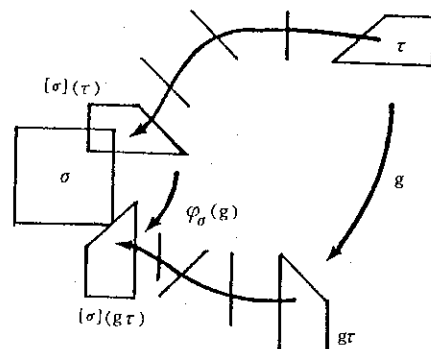


図 2.11

並進鏡映でなければ、 $g\gamma$ は $g\sigma$ から $g\sigma'$ への道であり、 γ が $\ell_1, \dots, \ell_m$ を、各 ℓ_i が左向きになるように横切れば、 $g\gamma$ は $g\ell_1, \dots, g\ell_m$ を、各 $g\ell_i$ が左向きになるように横切る。従って、

$$[g\sigma, g\sigma'] = R(g\ell_1; \theta(g\ell_1)) \cdots R(g\ell_m; \theta(g\ell_m))$$

となる。 θ は g -不変だから、

$$\begin{aligned} [g\sigma, g\sigma'] &= R(g\ell_1; \theta(\ell_1)) \cdots R(g\ell_m; \theta(\ell_m)) \\ &= gR(\ell_1; \theta(\ell_1))g^{-1} \cdots gR(\ell_m; \theta(\ell_m))g^{-1} \\ &= gR(\ell_1; \theta(\ell_1)) \cdots R(\ell_m; \theta(\ell_m))g^{-1} \\ &= g[\sigma, \sigma']g^{-1} \end{aligned}$$

g が裏返しの成分を含む場合は、次の $[\sigma, \tau]^{-1} = [\tau, \sigma]$ の証明の考え方を用いればよい。

$[\sigma, \tau]^{-1} = [\tau, \sigma]$ を示す。この等式には平坦折り紙の場合と少し異なる点がある。それは、面 σ から面 τ への道 γ を逆にたどれば面 τ から面 σ への道が得られるとかざらないという点である。図 2.12 で、 τ から σ への道は γ_1 や γ_2 であって、 γ' ではない。それは、 γ' が道の定義を満たしていないからである。しかし、折り紙の定義により、 γ と γ_1 をつないだループに沿って $[\sigma, \sigma]$ を計算すると恒等変換になるから、

$$[\sigma, \tau][\tau, \sigma] = 1,$$

$$[\sigma, \tau]^{-1} = [\tau, \sigma]$$

となる。従って、

$$\begin{aligned} [\sigma, g\tau]g[\sigma, \tau]^{-1} &= [\sigma, g\tau]g[\tau, \sigma] \\ &= [\sigma, g\tau]g[\tau, \sigma]g^{-1}g \\ &= [\sigma, g\tau][g\tau, g\sigma]g \\ &= [\sigma, g\sigma]g \end{aligned}$$

となり、 τ に依存しない。以上をまとめると、

定義 2.6 ($K; \theta$) を Γ -不変な結晶折り紙とする。 K の面に対して、 $\varphi_\sigma: \Gamma \rightarrow I_{\text{som}}(Y)$ を、

$$\varphi_\sigma(g) = [\sigma, g\sigma]g$$

で定義する。

命題 2.7 Γ -不変な結晶折り紙 ($K; \theta$) の面 σ と $\Gamma \ni g$ に対して、

- (i) $[g\sigma, g\sigma'] = g[\sigma, \sigma']g^{-1}$,
- (ii) φ_σ は準同型である,
- (iii) $\varphi_\sigma(g) = [\sigma', \sigma]\varphi_\sigma(g)[\sigma', \sigma]^{-1}$,
- (iv) $[\sigma]g = \varphi_\sigma(g)[\sigma]$.

証明 (i) は既に示した。他は $\varphi_\sigma(g)$ の定義や $[\sigma, \tau]$ の性質が平坦折り紙の場合と同じだから、同様の方法で証明できる ([8]).

φ_σ が準同型であるから、 $\varphi_\sigma(1')$ の階数は 0, 1 また

は 2 である。 $\varphi_\sigma(\Gamma')$ の階数が 2 の場合、 φ_σ は $I_{\text{som}}(Y)$ の中への同型写象である。

3. 平坦折り紙と三角形の内心

この章では、[7] の折り線と三角形の内心との関係、四角形の場合で考える。図 3.1 (1) の様な平坦折り紙の辺 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 を谷折り、 ℓ_4 を山折りして折りたたむ。そして、 ℓ_4 に垂直な直線 m に沿って折る。これをひろげると、頂点 O が三角形 ABC の内心になることが、[7] で示された。 ℓ_4 と垂直でない直線 n で折ってひろげると、(4) の様になるが、この場合でも点 O は四角形 $ABCD$ の内接円の中心になる。まとめると次の命題を得る。なお、証明で用いる「胞体分割 K は頂点 P で (平坦に) 折れる」は、点 P から出る辺を延長してできる胞体分割が平坦折り紙になっていることを意味する。

命題 3.1 ([7]) 内接円を持つ四角形 $ABCD$ と円の中心 I に対して、半直線 IA, IB, IC, ID からなる胞体分割 K および、 K に線分 AB, BC, CD, DA を加えた胞体分割 K' は共に平坦折り紙である。

証明 点 I から 4 辺に垂線を下ろすと、合同な三

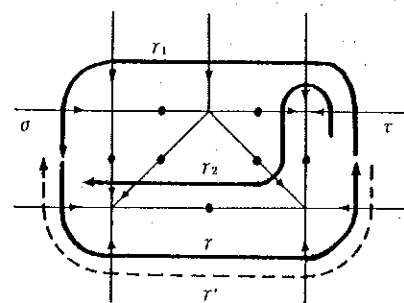


図 2.12

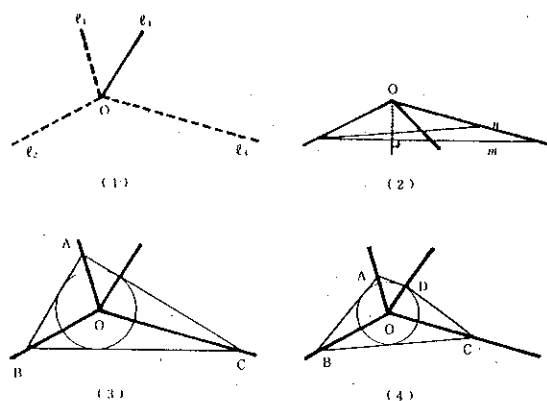


図 3.1

角形の組が、点Iの周りに4組できるから、

$$\begin{aligned} & \angle AIB + \angle CID \\ &= \alpha + \beta + \gamma + \delta \\ &= 2(\alpha + \beta + \gamma + \delta)/2 \\ &= \pi \end{aligned}$$

となる (図3.2). 従って、 K は平坦折り紙である。 K' の頂点Aにおいて、 $\angle IAB = \angle IAD$ であるから、 K' は点Aで折れる。頂点B, C, Dでも同様に折れるから、 K' は平坦折り紙である。

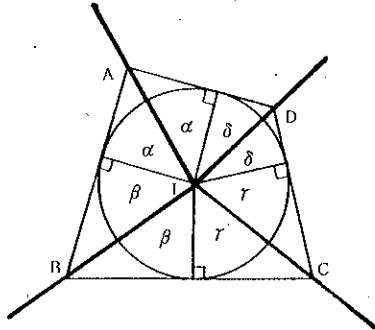


図3.2

補題3.2 三角形ABCの内心Iから、3辺AB, BC, CAに下ろした3垂線とIA, IB, ICを延長した半直線からなる胞体分割 K は平坦折り紙である。更に、 K に3辺AB, BC, CAを加えたものも平坦折り紙である。

証明 命題3.1と同様。

命題3.3 互いに外接する円の集合に対して、接する円の中心を結んでできる図形 F (面も含む)が三角形で構成された凸な図形であるとする。このとき、(i), (ii), (iii)で得られる胞体分割 K は平坦折り紙である (図3.3)。

- (i) 各三角形の内心と頂点を結ぶ。
- (ii) 内心から3垂線を下ろす。反対側からの垂線がないときは、垂線を延長する。
- (iii) F の境界上の頂点において、外角の二等分線を引く。

証明 F が凸であるから、(i)で引いた線分は F の外で交わらない。従って、 K の頂点は次の3種類である。

- (a) F の頂点,
- (b) 三角形の内心,
- (c) 内心から下ろした垂線の足。

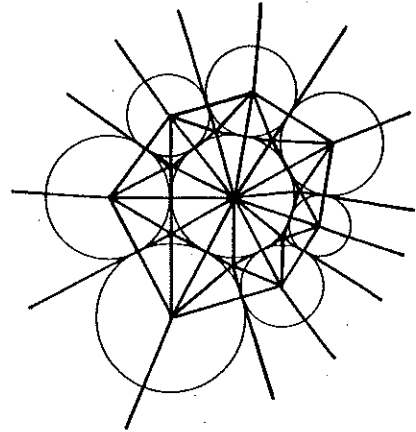


図3.3

(a)の場合、 F の内部においては、命題3.1と同様、頂点Aの周りの角をひとつおきにとった和は π である。また、 F の境界上の点Bでは、(iii)より、外角を二等分しているの、頂点A, Bで K は折れる。(b)の場合、補題3.2より、内心で折れる。(c)の場合、4つの角が全て $\pi/2$ であるから、この点でも折れる。従って、 K は平坦折り紙である。

系3.4 命題3.3の図形 F より構成される平坦折り紙 K から F の境界の辺を除いた胞体分割 L は平坦折り紙である。

証明 K の頂点と L の頂点で異なるものは、

- (a) F の境界上にある頂点,
- (b) F の境界と垂線との交点

の2種類である。(a)の頂点Aでは、2本の折り線が除かれるので、ひとつおきにとった点Aの周りの角の和は、 $(\beta + \alpha_1) + \alpha_2 + \dots + \alpha_n + \alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1} + (\alpha_n + \beta)$ になり等しいので、点Aで折れる (図3.4)。

□

4. 平坦折り紙の一構成方法

第3章の平坦折り紙の構成は、[7]の折り線と三角形の内心との関係を基にしたものであった。従って、そこで得られる平坦折り紙の面はほとんど三角形になる。[8], [9]で取り扱った正規な平坦折り紙 (面は全て四角形で、各頂点から4本の辺が出ている。)は、この方法では構成できない。この章では、正規な平坦折り紙を構成するひとつの方法を説明する。

まず、内接円を持つ四角形の良く知られた性質を復習する。

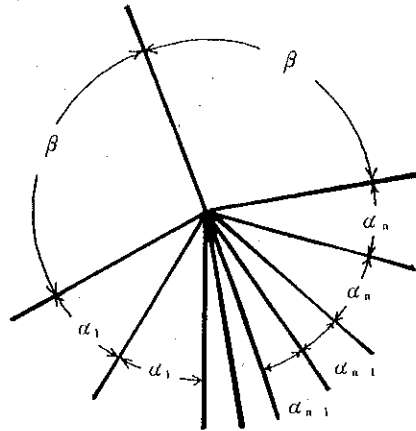


図 3. 4

定理 4. 1 四角形 ABCD が内接円を持つ必要十分条件は、 $AB+CD=BC+DA$ となることである。

円の中心から 4 辺に垂線を下ろして直角三角形を作り、三平方の定理を用いれば証明できる。この定理から、次の系を得る。

系 4. 2 図 4. 1 の様な接する 4 つの円の中心を結んでできる四角形は内接円を持つ。

命題 4. 3 (正規な平坦折り紙の一構成方法)
互いに外接する円の集合に対して、接する円の中心を結んでできる胞体分割 F が正規であるとする (図 4. 2 (1))。このとき、 F の面の内接円の中心と頂点を結ぶ線分からなる胞体分割 K は正規な平坦折り紙である (図 4. 2 (2))。

証明 系 4. 2 より、 F の面は内接円を持つ。従って、命題 3. 1 より、この内接円の中心で K は折れる。 F の頂点 P に対して、点 P を含む F の 4 つの面の内接円の中心と点 P を結ぶ線分はそれぞれ角 P を二等分する。ゆえに、 K の頂点 P で向かい合った角の和は π となり、 K は頂点 P で折れる。注意： F は平坦折り紙ではない。しかし、 F と K を重ねたものは平坦折り紙である。

5. 平面結晶折り紙の折り方

[8], [9] で紹介した平面結晶折り紙の折り方を 2 つ紹介しよう。

① 正方形の紙を、縦横 16 等分するように折り目を

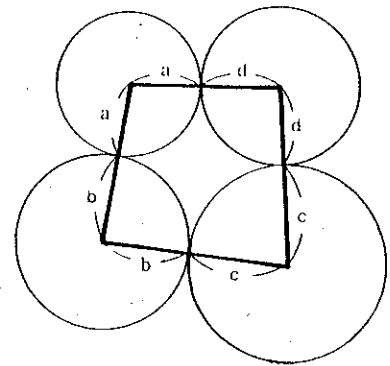
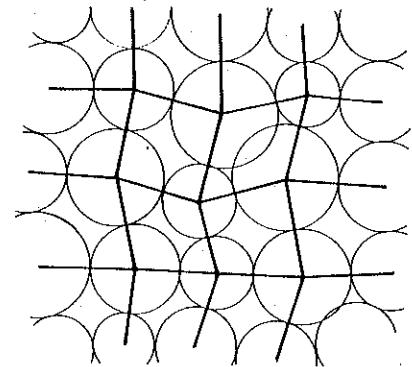
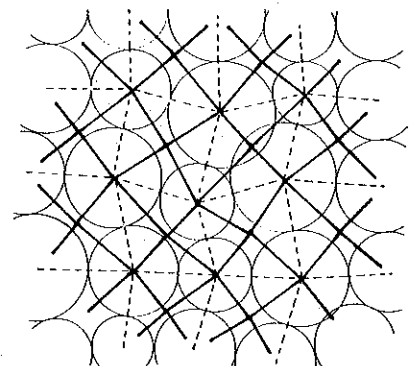


図 4. 1



(1)



(2)

図 4. 2

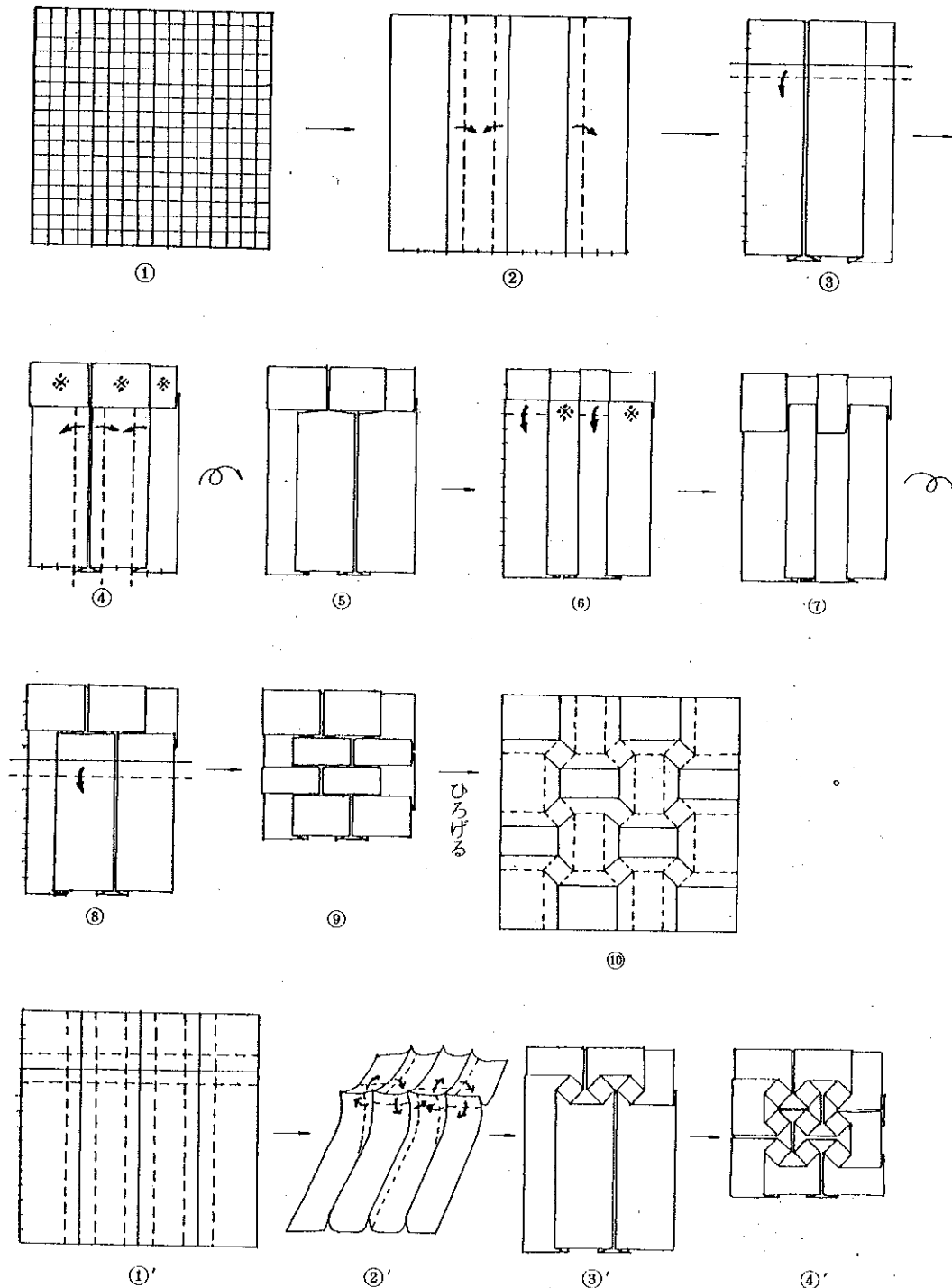
つける。

- ② 実線を山折り、破線を谷折りして、折りひだを 3 つ作る。
- ③ 横方向に、ひだをひとつ作る。
- ④ 矢印の向きに、ひだを折り返す。このとき、※印の部分は動かさない。
- ⑤ 紙全体を裏返す。
- ⑥ 矢印のついた部分だけ、下方にひだを折り返す。※印の部分は動かさない。
- ⑦ 紙全体を裏返す。
- ⑧ ③-⑦の作業をこの横方向のひだについて行な

- う。以下、同様にすると⑨を得る。
- ⑨ ⑨を広げてしまうと、⑩の様な折り目がついている。
- ①' 先の①と同じ様に折り目をつける。そして、図

の様に、山折り線と谷折り線で、縦3本、横1本ひだをつける。ただし、先の③の様に平坦に折りたたんでしまわないで、ひだが立った状態にする。

②' 縦横のひだがぶつかった点を中心に、その周辺を、矢印の向きにねじる様に回転させながら、押



で、縦3本、横1本
③の様に平坦に折り
が立った状態にする。
を中心に、その周辺
回転させながら、押



しつぶして、正方形を作る。うまく押しつぶせない場合は、先の⑩の小さな正方形の辺を山折りしておいてから折ると良い。

③' 先の⑧同様、横向きのひだを付け加えて同じ作業を繰り返す。

④' 出来上がり。これをひろげて、⑩と比較すると、山谷の関係（[9] 第2章3節）が確認できる。

参考文献

- [1] H. S. M. Coxeter and W. O. J. Moser, *Generators and relations for discrete groups*, Springer-Verlag(1957).
- [2] R. H. Crowell and R. H. Fox, *Introduction to Knot Theory*, Blaisdell Pub. Com. (1963).
- [3] T. Sundara Row, *Geometric exercises in paper folding*, Dover Pub., I C., New York (1966).
- [4] 堀井洋子,『折り紙と数学』, 明治図書(1977).
- [5] 藤本修三,『創造性を開発する立体折り紙』, 新写植出版(1976).
- [6] 藤本修三, 西脇正巳,『創造する折り紙遊びへの招待』, 朝日カルチャーセンター(1982).
- [7] 伏見康治, 伏見満枝,『折り紙の幾何学』, 日本評論社(1979).
- [8] 川崎敏和,『2次元結晶群の作用で不変な折り紙』, 九州大学大学院博士後期課程単位修得論文(1983).
- [9] 川崎敏和,『結晶折り紙』, 佐世保工業高等専門学校研究報告, 第23号(1986), 91-99.
- [10] J. Rosen, 吉沢保枝訳,『シンメトリーを求めて』, 紀伊國屋書店(1977).
- [11] H. Weyl, 遠山啓訳,『シンメトリー』, 紀伊國屋書店(1970).