

高次元の平坦折り紙について

川崎 敏 和

On High Dimensional Flat Origamis

T. Kawasaki

佐世保工業高等専門学校研究報告 第25号抜刷

昭和63年12月26日発行
1988

佐世保工業高等専門学校

857-11 佐世保市沖新町 1-1

高次元の平坦折り紙について*

川崎 敏 和**

1. 序 文

先の研究報告 [2], [3] で紙の平坦な折りたたみを, [4] で紙を空間内で立体的に折ることを数学的に記述した. これらは, 2次元ユークリッド平面 R^2 から R^2 自身へ, あるいは3次元ユークリッド空間 R^3 への区分的等距離変換の考察であった.

本報告の目的は, 3次元以上のユークリッド空間や球面の平坦な折りたたみを数学的に記述し, それらの関係を調べることである.

2. 平面の折りたたみから空間の折りたたみへ

[2], [3] で与えた平坦折り紙の定義は, 2次元ユークリッド平面 R^2 を平坦に折りたたむことを数学的に記述したものであった. では, 3次元ユークリッド空間 R^3 を平坦に折りたたむということは, どのように解釈したらよいであろうか. もちろん平坦折り紙のモデルは, 普通の折り紙である. そして, 最も簡単な平坦折り紙は, 紙を半分に折りたたんだものである. つまり, 図2.1のように, 1次元の直線 ℓ に関して, 2次元の平面を半分に折り返したものである. そして, これを数学的に記述するとき, 直線 ℓ に関する鏡映変換 $R(\ell)$ を用いた. この考え方を空間へ適用すると,

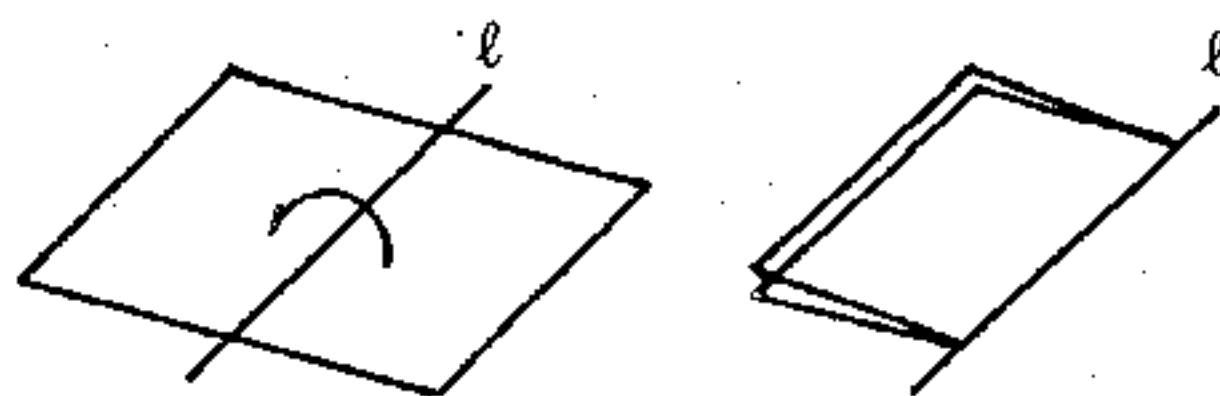


図2.1

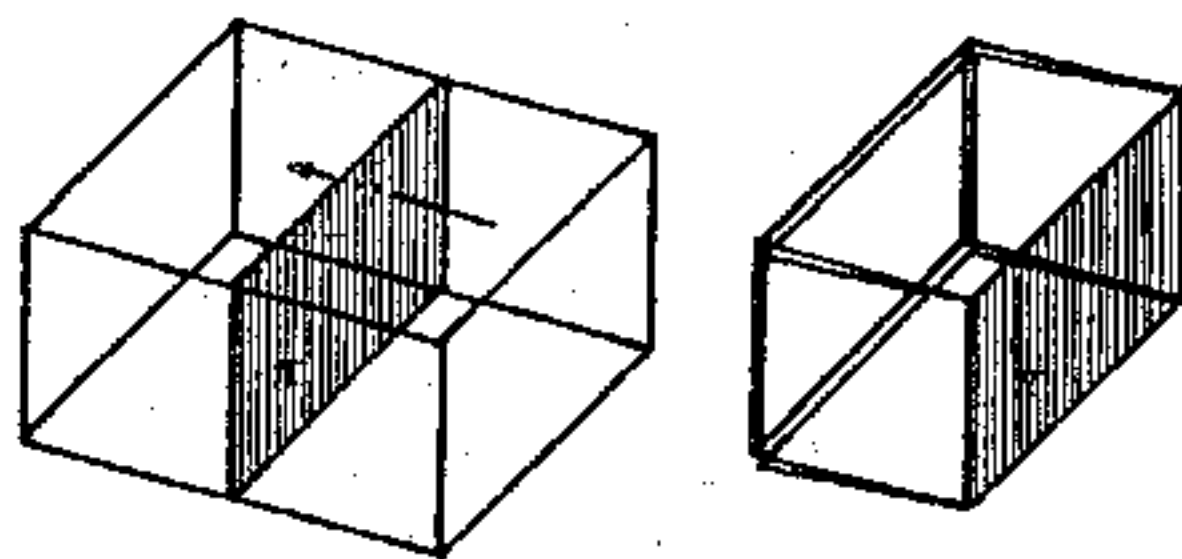


図2.2

最もやさしい3次元空間の平坦折りたたみは図2.2のようなもので, これは3次元空間内の2次元平面 π に関する鏡映変換 $R(\pi)$ で表される.

注意: 空間を平坦に折るといえるのは, [4] で考察したような平面 R^2 を空間 R^3 の中で折りたたんでいく過程を指すのではない. [2], [3] の平坦折り紙で折る過程を完全に無視したように, 本稿の平坦折り紙も折る途中については触れない. R^3 の平坦折り紙の定義を与えるため, 平面 R^2 の場合の定義を復習しよう.

定義2.1 (R^2 の平坦折り紙) R^2 の胞体分割 K が平坦折り紙であるとは,

- (i) K は局所有限である,
- (ii) K の0次元胞体を通らず, 1次元胞体 $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$ と順に交わる R^2 内の閉曲線 γ に対して,

$$R(\ell_1)R(\ell_2) \cdots R(\ell_n) = 1$$

を満たすときに言う.

R^3 の平坦折り紙の定義を, R^2 の平坦折り紙にならって書く. 条件 (i) は異常な折り紙を対象にしないために付けたものである. したがって, 空間の場合にも付けておく. 条件 (ii) を空間に対して自然に書き直すと, R^3 の平坦折り紙の定義は次のようになる.

定義2.2 (R^3 の平坦折り紙) R^3 の胞体分割 K が平坦折り紙であるとは,

- (i) K は局所有限である,
- (ii) K の0, 1次元胞体を通らず, 2次元胞体 $f_1, f_2, \dots, f_n$ を順に貫通する R^3 内の閉曲線 γ に対して,

$$R(f_1)R(f_2) \cdots R(f_n) = 1$$

を満たすときに言う.

R^3 の平坦折り紙 K の任意の3次元胞体 σ, σ' に対して, R^3 から R^3 への等距離写像 $[\sigma, \sigma']$ と折りたたみ写像 $[\sigma]$ を次のように定義する.

定義2.3 K の任意の3次元胞体 σ, σ' に対して, σ 内の点から σ' 内の点への曲線 γ が, 0, 1次元胞体を通らず, 2次元胞体 $f_1, f_2, \dots, f_n$ を順に貫通するとき, R^3 から R^3 への等距離写像 $[\sigma, \sigma']$ を,

*原稿受付 昭和63年9月16日

**佐世保工業高等専門学校一般科目

$$[\sigma, \sigma'](x) = R(f_1)R(f_2) \cdots R(f_n)$$

で定義する.

定義 2.4 (折りたたみ写像) K を R^3 の平坦折り紙, σ を K の 3 次元胞体とする. このとき, 折りたたみ写像 $[\sigma]: R^3 \rightarrow R^3$ を, 3 次元胞体 σ' の点 x に対し,

$$[\sigma](x) = [\sigma, \sigma'](x)$$

で定義する.

[2] で述べたように, 条件 (ii) より, γ の取り方に依らず $[\sigma, \sigma']$ は一意に定まる. 多面体 σ を固定して, 空間 R^3 を σ に向かって引き寄せるように折りたたんだとき, 折りたたむ前と後を対応させる写像が $[\sigma]$ である. また,

$$[\sigma, \sigma'] = [\sigma, \sigma'] [\sigma', \sigma''],$$

$$[\sigma'] = [\sigma', \sigma] [\sigma]$$

が成立することは, [2], [3] と同様である.

3. R^3 の平坦折り紙の例

簡単のため以下, 定義 2.3 の鏡映変換の積を $R(\gamma)$ で表す.

例 3.1 図 3.1(1)のように, R^3 を xy 平面, yz 平面, zx 平面で 8 つの部分に分割したものは, R^3 の平坦折り紙である. 条件 (ii) が, 図 3.1(2)のような閉曲線 γ に対して成り立つことを確認しよう. 閉曲線 γ が貫通する面 $f_1, f_2, \dots, f_6$ に関する鏡映変換を行列で表すと,

$$R(f_1) = R(f_3) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R(f_2) = R(f_5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R(f_4) = R(f_6) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

となる. これらの積を実際に計算すると, $R(\gamma)$ は単位行列になる.

例 3.2 図 3.2(1)のように例 3.1 を二つつなぎ合わせたものは平坦折り紙になる. 図 3.2(1)のような閉曲線 γ に対する $R(\gamma)$ の計算は, 例 3.1 よりも面倒である. そこで, 図 3.2(2)のようにバイパスをつけて, 閉曲線 γ をもっと単純な二つの閉曲線 γ_1, γ_2 に分解

すると,

$$\begin{aligned} R(\gamma) &= R(f_1) \cdots R(f_8) R(f_1) \cdots R(f_6) \\ &= R(f_1) \cdots R(f_3) R(g) R(g) R(f_4) \cdots R(f_6) \\ &= R(\gamma_1) R(\gamma_2) \end{aligned}$$

となる. もし, $R(\gamma_1) = 1, R(\gamma_2) = 1$ が分かれば, $R(\gamma) = 1$ となる. 従って, 条件 (ii) の閉曲線 γ は, 一つの 0 次元胞体のまわりを一周するものとしてよいことが分かる.

例 3.3 図 3.3(1)のようなスケルトンで表される胞体分割 K は平坦折り紙である. この図では分かりに

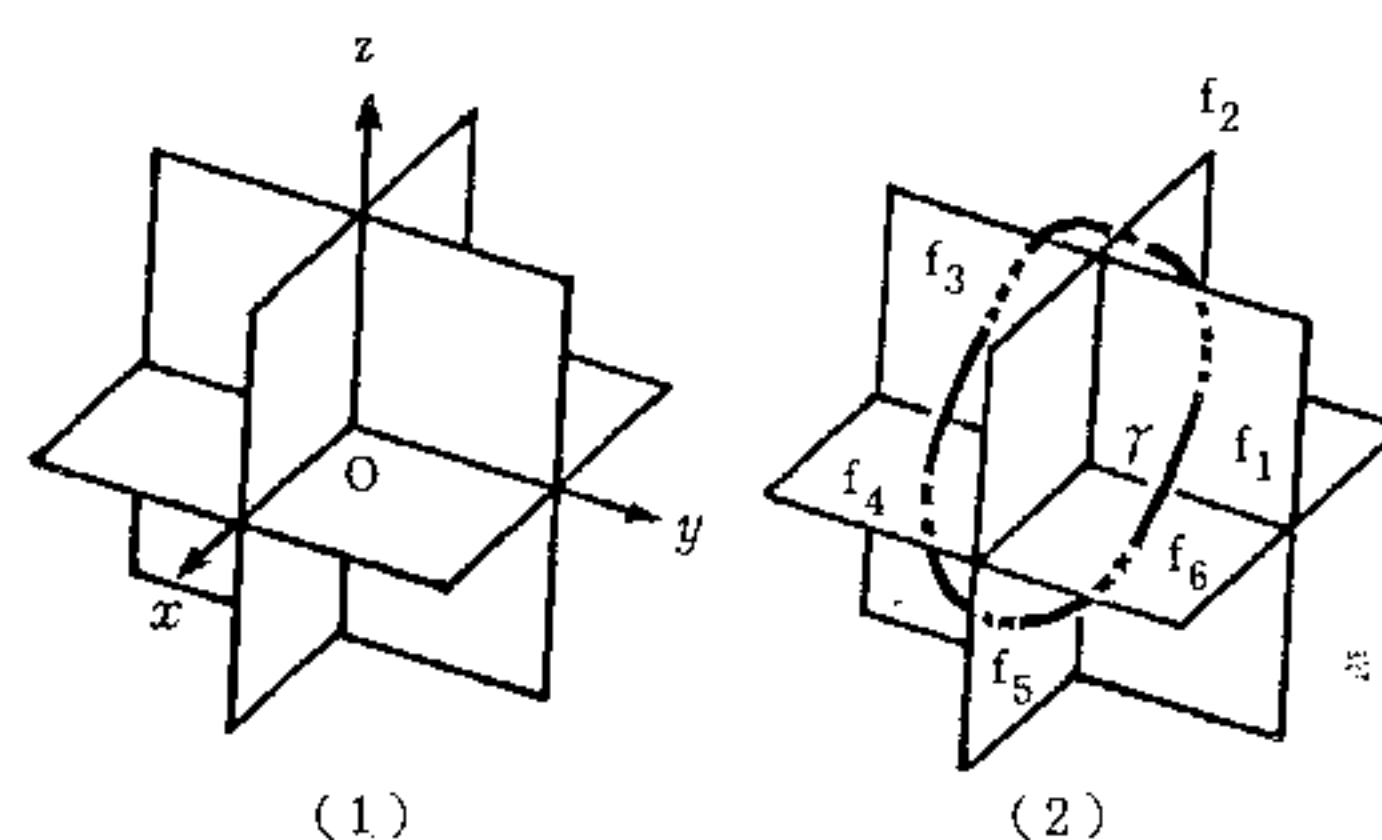
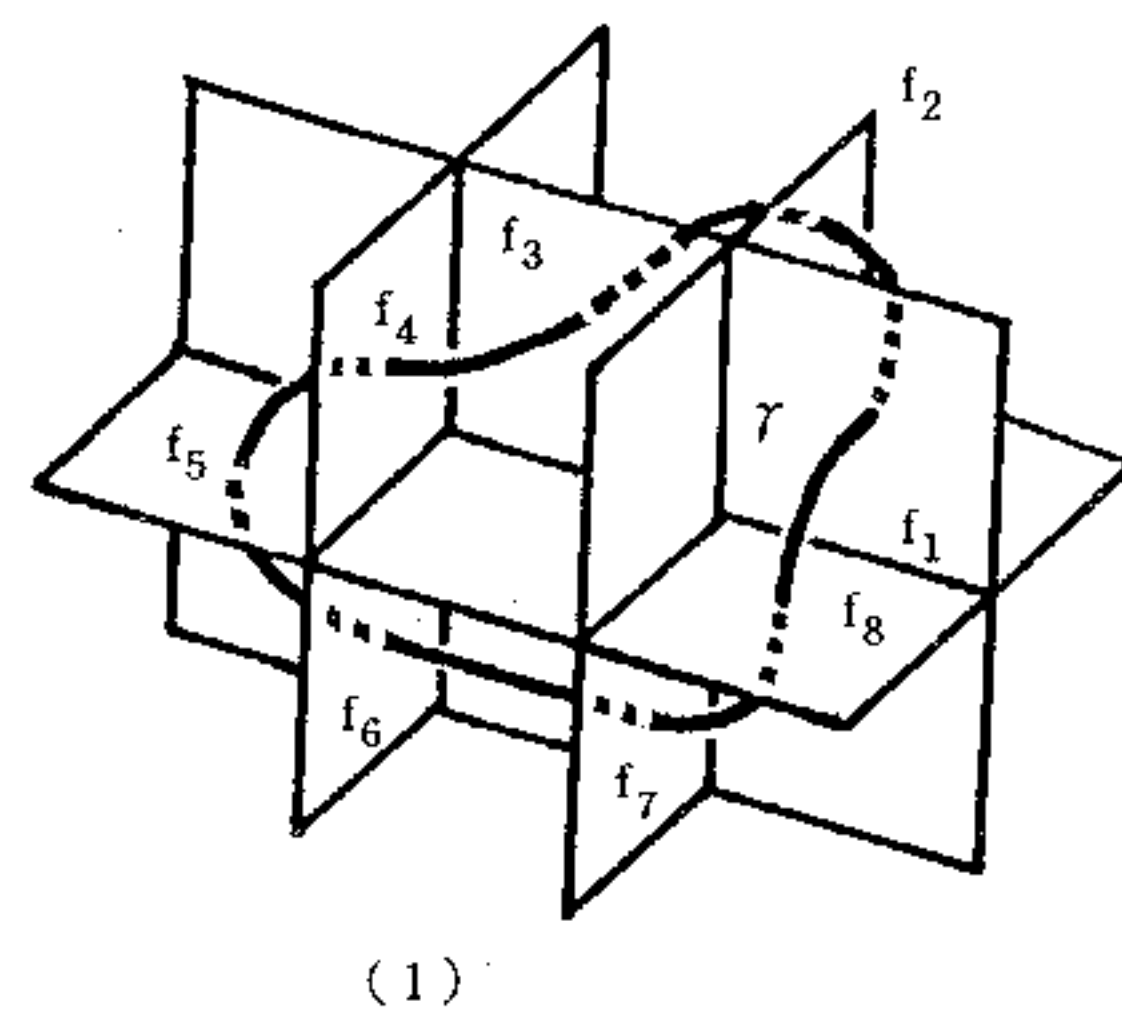
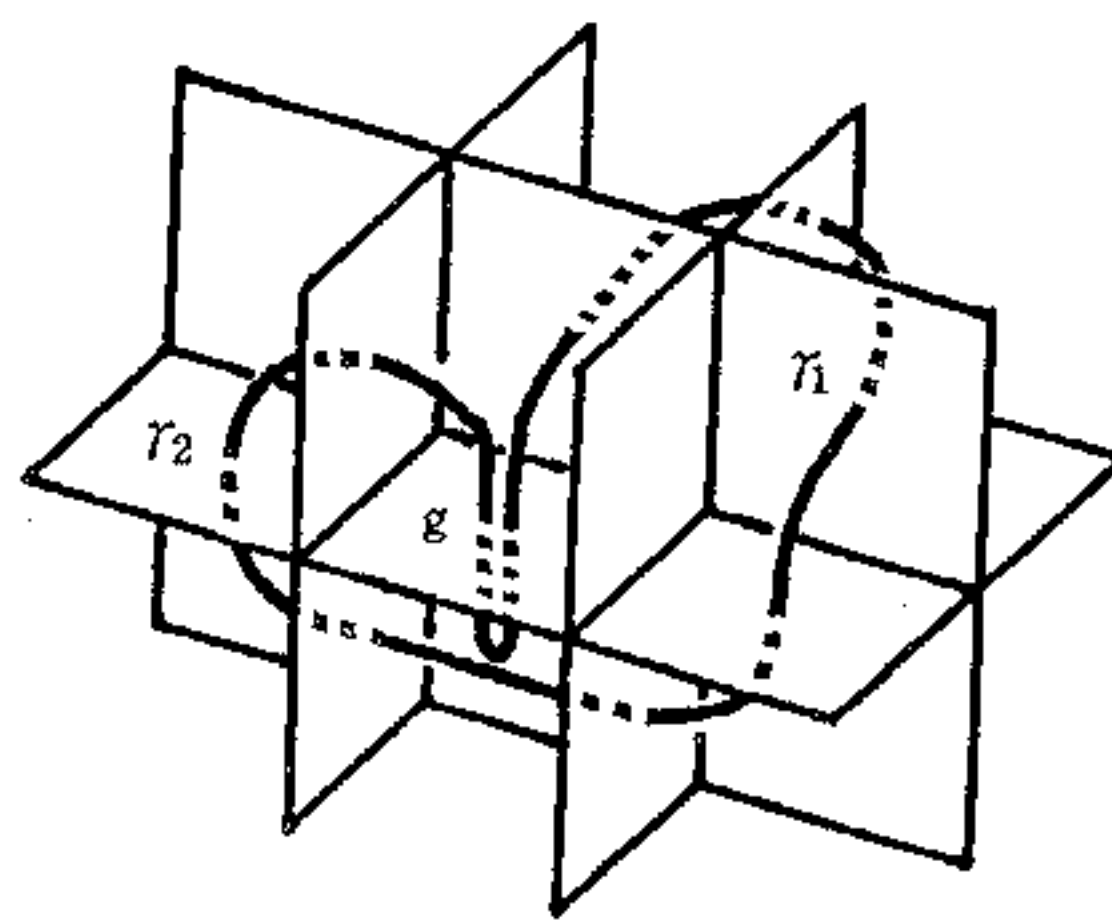


図 3.1

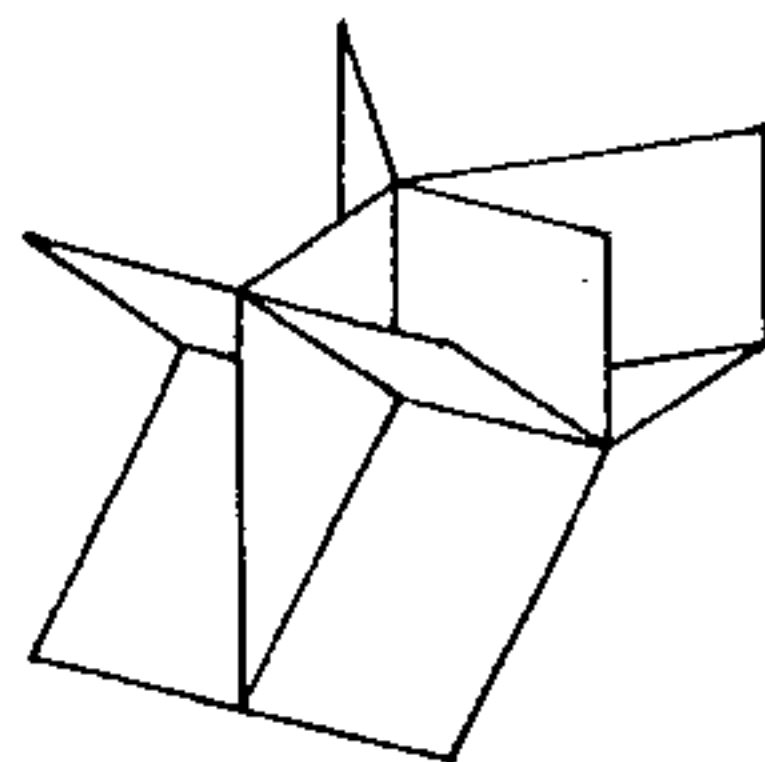


(1)

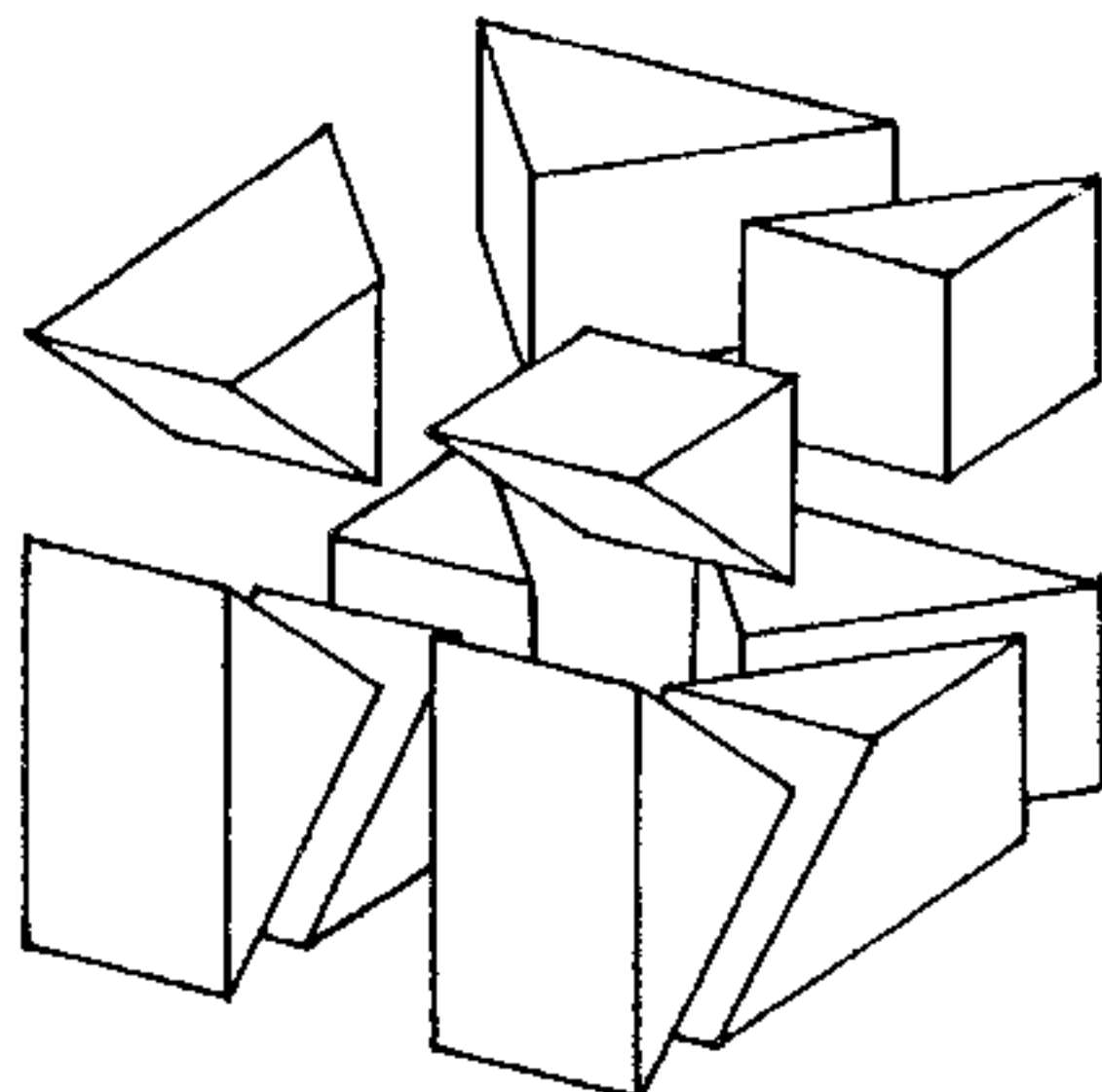


(2)

図 3.2

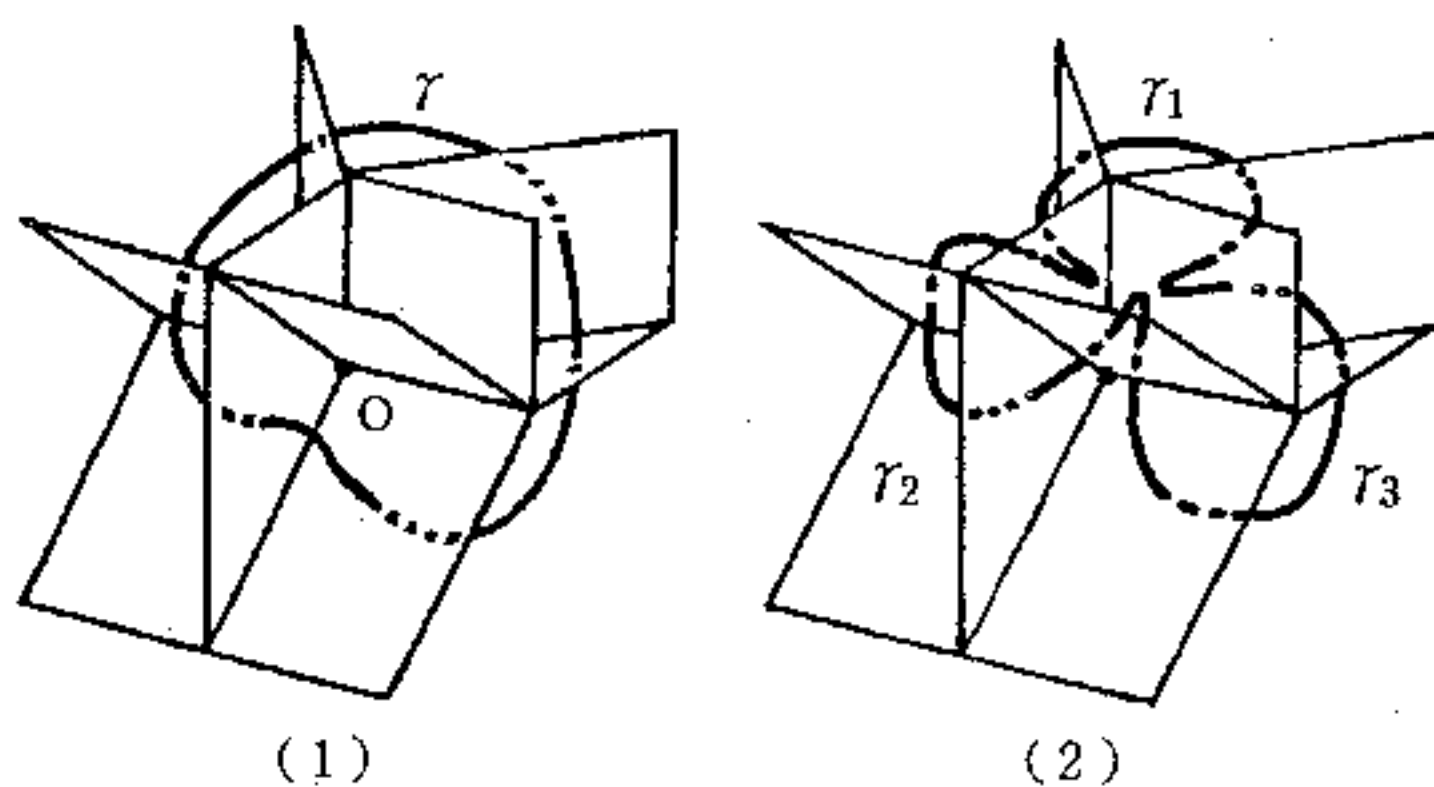


(1)

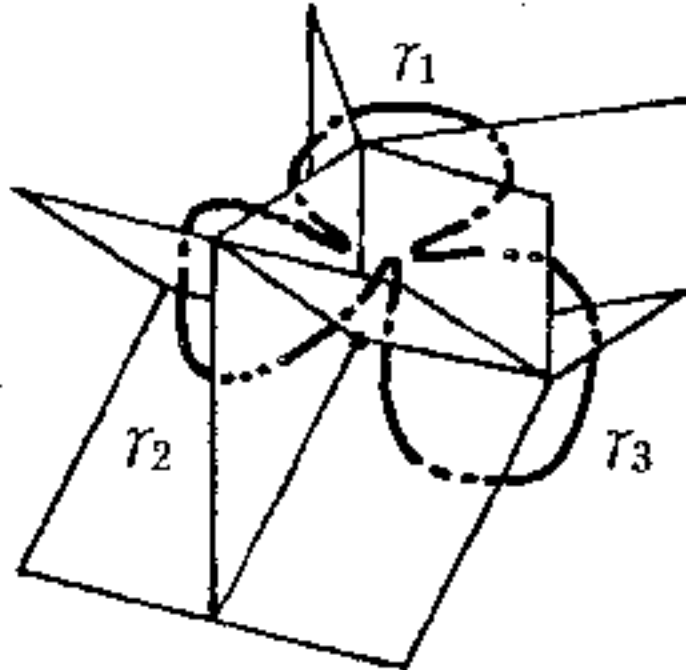


(2)

図 3.3



(1)



(2)

図 3.4

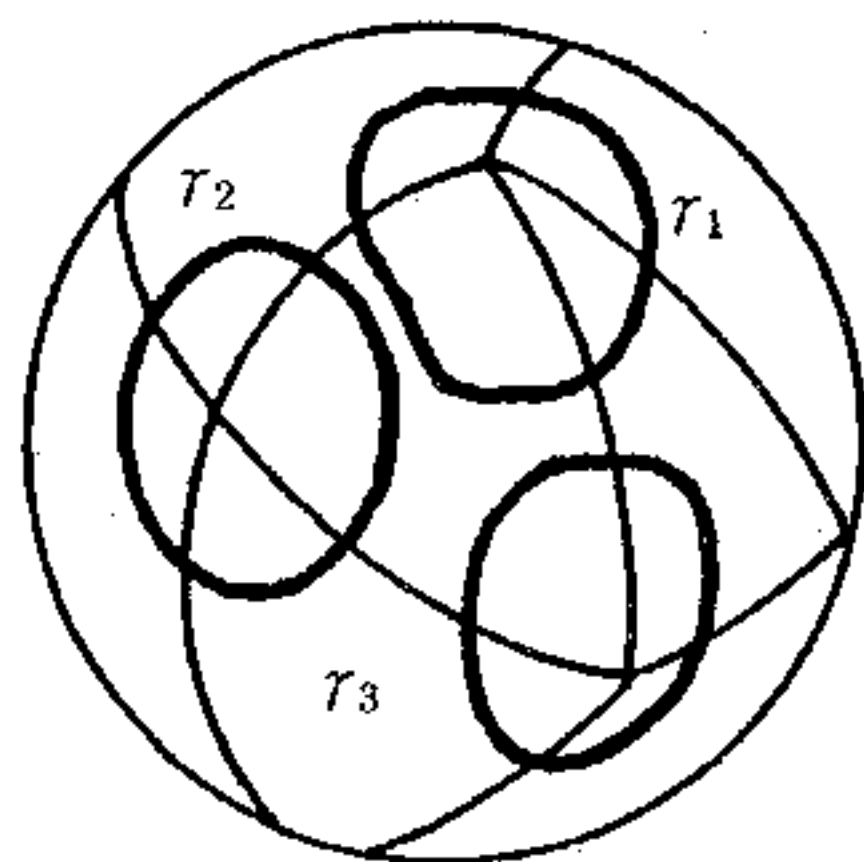


図 3.5

くいので、豆腐を包丁で切るように、立方体をこのスケルトンで切ったものを図 3.3(2)に示しておく。なお、切り取られてできる多面体のどの面も、その内角は $\pi/4$, $\pi/2$, $3\pi/4$ のいずれかである。

この胞体分割 K には 0 次元胞体は一つしかないが、先の二つの例より構造が複雑なので、 $R(\gamma)$ を計算するとき、閉曲線 γ を簡単な閉曲線に分解して計算したほうが良い。例えば図 3.4(1) のような閉曲線 γ は図 3.4(2) のように三つに分解する。三つの閉曲線 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ を図 3.5 のように、点 O を中心とする球面 S^1 に張り付けると見やすくなる。もし、

$$R(\gamma_1) = R(\gamma_2) = R(\gamma_3) = 1$$

が分かれば、

$$R(\gamma) = R(\gamma_3)R(\gamma_2)R(\gamma_1) = 1$$

となる。 γ_2 をもとのスケルトンに描くと、直交する二つの面の共通線をぐるっと一周しているので、明らかに $R(\gamma_2) = 1$ となる。また、 γ_1, γ_3 に対しても、 $R(\gamma_1) = R(\gamma_3) = 1$ となるが、これは 5 章の命題 5.5 を用いれば、容易に分かる。

4. 球面 S^2 の平坦折り紙

例 3.2 で示したように、 R^3 の胞体分割 K が平坦折り紙になっているかどうかは、 K の 0 次元胞体毎に、その近くで条件 (ii) をチェックすれば分かる。そして、このチェックは球面 S^2 上で考えると分かりやすい。そこで、本章では、球面 S^2 の平坦折り紙を考察する。以下 R^3 の点 p を中心とする単位球面を S_p^2 で、 S_p^2 上の点 q における接平面を π_q で表すことにする。また、胞体分割 K に対して、一つの 0 次元胞体の近くだけ考察することが多いので、局所的な胞体分割を次のように定める。

定義 4.1 (局所的な胞体分割) K を R^2, R^3 の局所有限な胞体分割、 p を K の任意の 0 次元胞体とする。 K から p を含まない胞体を取り除き、点 p を含む胞体を無限に延長してできる胞体分割を、 K の p における局所的な胞体分割あるいは p についての局所化と言い、 $K(p)$ と書く(図 4.1)。

K の各胞体は局所化により、無くなってしまふ、変わらない、もとより広がる(線分→半直線、面→錐、多面体→錐体)のいずれかである。そこで、 $K(p)$ の胞体名には K の胞体名をそのまま使うことにする。「 R^3 の胞体分割 K が平坦折り紙になっているかどうかは、 K の 0 次元胞体毎に、その近くで条件 (ii) をチェック

すれば分かる.] と言うことは, [2], [3] の R^2 の場合と合わせて, 次のように書ける.

補題 4.2 R^2, R^3 の局所有限な胞体分割 K が平坦折り紙であるための必要十分条件は, K の任意の 0 次

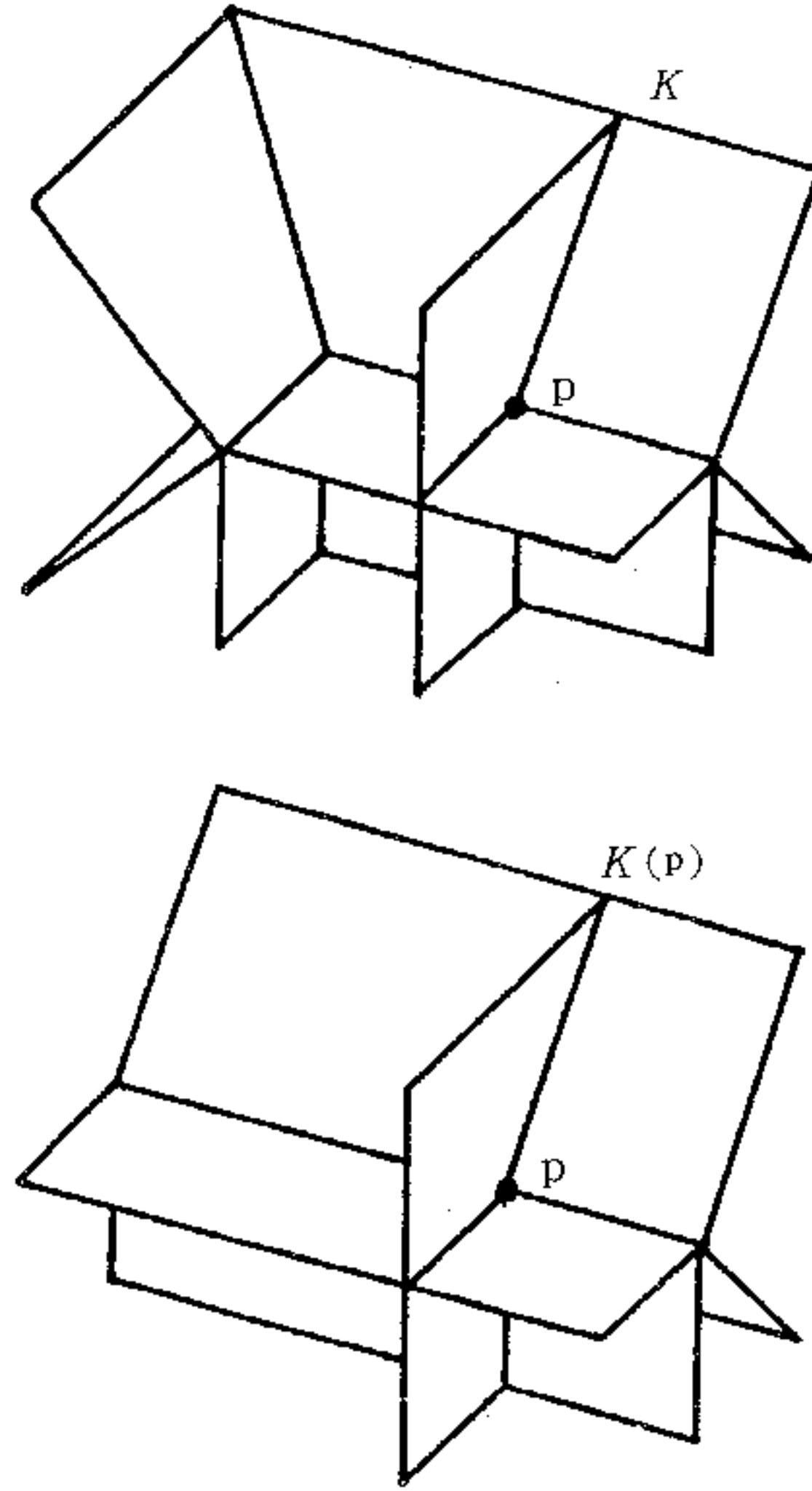


図 4.1

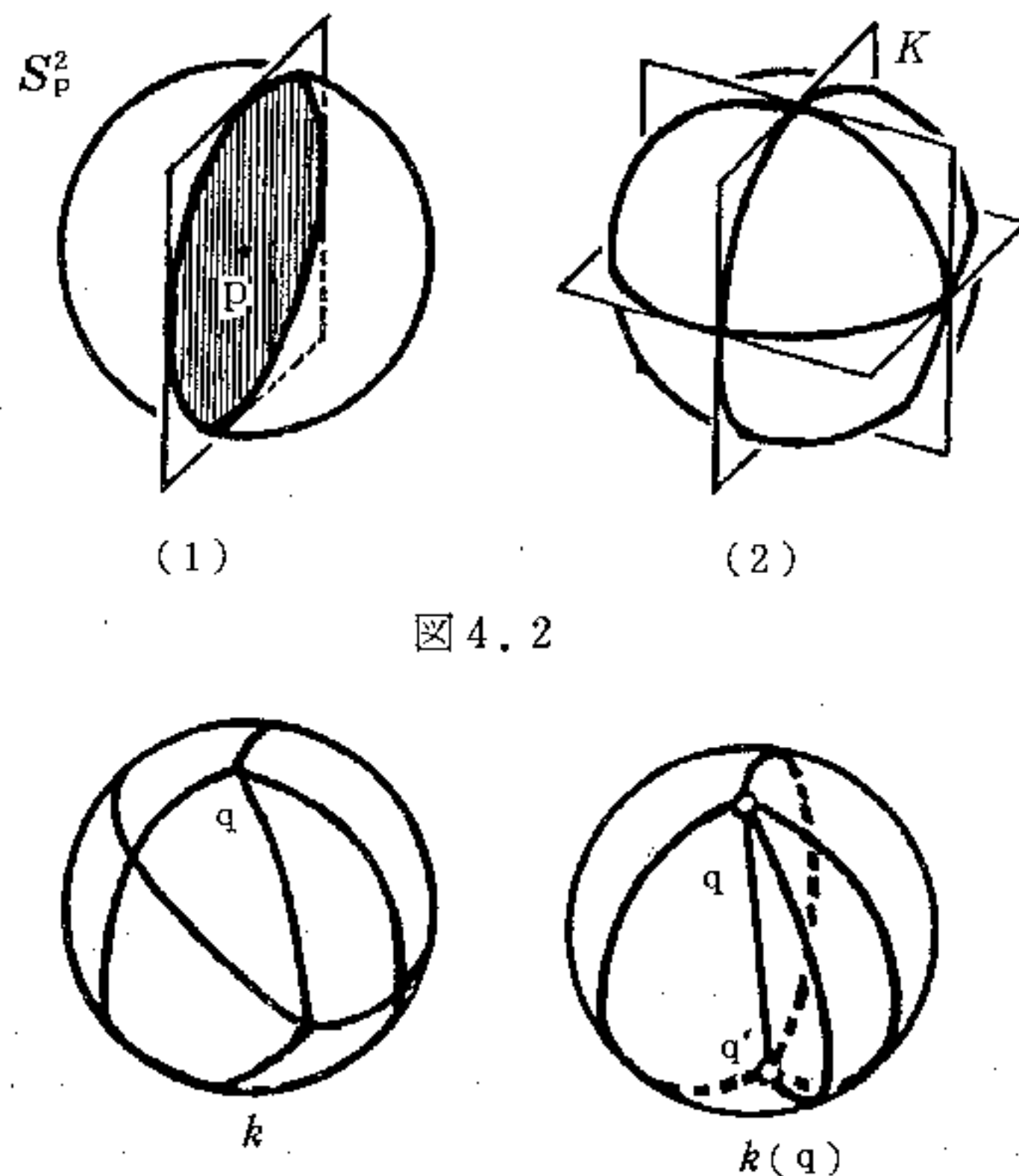


図 4.2

図 4.3

元胞体 p に対して, $K(p)$ が平坦折り紙となることである.

球面 S^2_p 上の直線は p 中心の大円であり線分は大円弧である. だから S^2 の胞体分割 K は S^2 上の線分 (大円弧) による分割である. S^2_p を R^3 で考えるとき, 大円は p を含む平面による S^2_p の切り口として現われる (図 4.2 (1)). 従って, 中心 p から放射状にひろがった胞体 (半直線, 錐体) からなる R^3 の胞体分割 K と S^2 の交わりは S^2 の胞体分割を与える (図 4.2 (2)). そこで, 次の定義を与える.

定義 4.3 (切断) K を R^3 の局所有限な胞体分割, p を K の 0 次元胞体とする. さらに, $K(p)$ の 1, 2, 3 次元胞体と S^2_p の交わりを, それぞれ 0 次元胞体 (点), 1 次元胞体 (大円弧), 2 次元胞体 (球面凸多角形) とする S^2_p の胞体分割を S^2_p による $K(p)$ の切断と言う.

R^2 や R^3 の場合同様に, S^2 の胞体分割 k に対して, 局所的な胞体分割 $k(q)$ を構成できる. この場合, S^2 の 0 次元胞体 q を端点とする大円弧は, q と反対の極 q' まで延長される (図 4.3). では, S^2 の平坦折り紙の定義を与える.

定義 4.4 (S^2 の平坦折り紙) S^2 の胞体分割 k が次の条件を満たすとき, 平坦折り紙であると言う.

- (i) k は局所有限である,
- (ii) k の 0 次元胞体 q に対して, q を端点とする 1 次元胞体は偶数個ある,
- (iii) q を端点とする 1 次元胞体を順に, $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{2n}$, そして ℓ_i と ℓ_{i+1} のなす角度を α_i (α_{2n} は ℓ_{2n} と ℓ_1

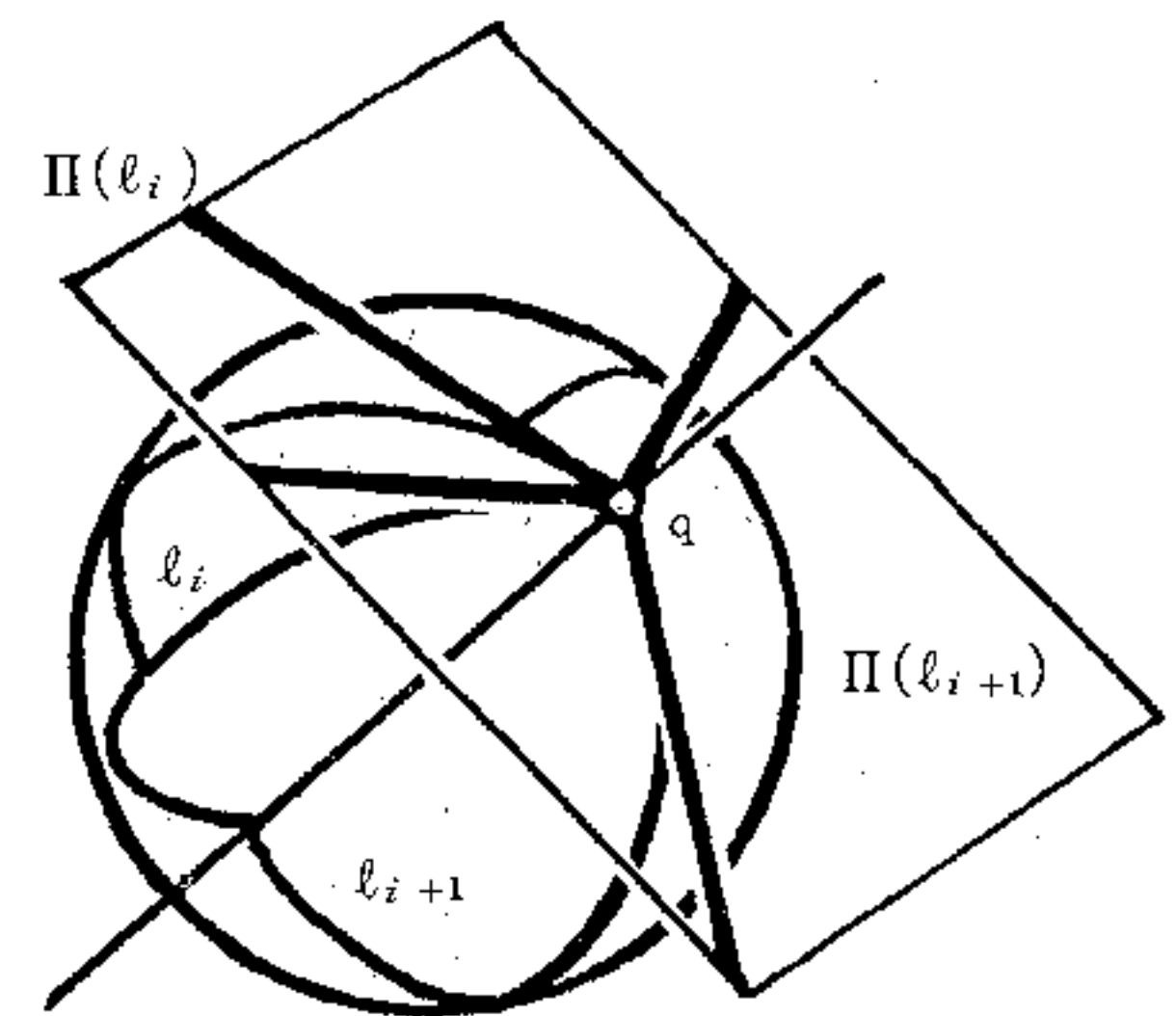


図 4.4

のなす角度) とすると,

$$\alpha_1 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_{2n-1} = \alpha_2 + \alpha_4 + \cdots + \alpha_{2n} = \pi.$$

注意: 条件 (iii) の ℓ_i と ℓ_{i+1} のなす角度 α_i は, 大円弧 ℓ_i を含む平面と大円弧 ℓ_{i+1} を含む平面のなす角度である. 球面 S^2 の中心 p から q における接平面への中心投影を Π とすると, α_i は $\Pi(\ell_i)$ と $\Pi(\ell_{i+1})$ のなす角度に等しい (図 4.4). 従って, 次の補題を得る.

補題 4.5 k を S^2 の局所有限な胞体分割とするとき, 次の条件は同値である.

(C₁) k は S^2 の平坦折り紙である,

(C₂) k の任意の 0 次元胞体 q に対して, S^2 の中心から接平面 π_q への中心投影 Π による $k(q)$ の像 $K = \Pi(k(q))$ は R^2 の平坦折り紙である.

5. R^3 の平坦折り紙と S^2 の平坦折り紙との関係

S^2 の平坦折り紙と R^2 の平坦折り紙は局所的には同じであることを前章で述べた. 本章では, R^3 の平坦折り紙と S^2 の平坦折り紙の関係を考察する.

定義 5.1 K を R^3 の胞体分割, ℓ を K の任意の 1

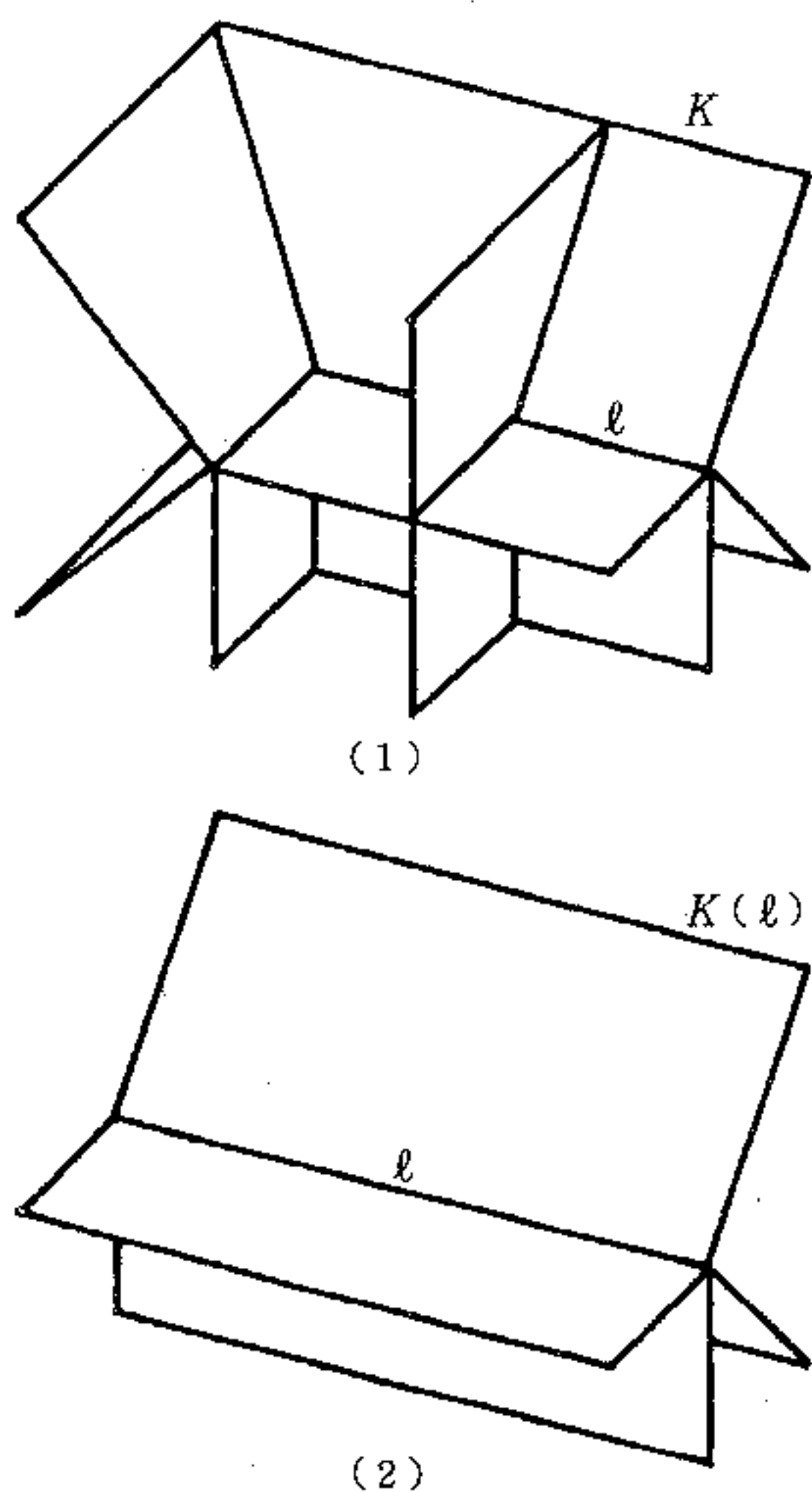


図 5.1

次元胞体とする. このとき, K から ℓ を含まない胞体を除き, ℓ を含む胞体を ℓ から放射状に延長してできる胞体分割を $K(\ell)$ と書き, ℓ についての局所化と言う (図 5.1).

1 次元胞体 ℓ は, $K(\ell)$ において, ℓ を延長した直線になり, 元の線分と異なるが, $K(p)$ の場合同様, 同じ記号 ℓ で表すことにする. 2 次元胞体についても同様である.

補題 5.2 K を R^3 の局所有限な胞体分割, p を K の任意の 0 次元胞体, ℓ を p を端点とする K の任意の 1 次元胞体とする. このとき, $K(p)$ の ℓ による局所化は $K(\ell)$ と等しい.

証明 K において, ℓ を含む 2 次元胞体を $f_1, f_2, \dots, f_n$ とおく. $K(\ell)$ の 2 次元胞体はこれら $f_1, f_2, \dots, f_n$ を含む半平面であり, $K(\ell)$ はこれらの半平面によって区切られた胞体分割である. 一方, ℓ を含む $K(p)$ の 2 次元胞体は $f_1, f_2, \dots, f_n$ を拡張したものである. $K(p)$ の他の 2 次元胞体は ℓ で局所化するとき取り除かれるので, $K(p)$ の ℓ による局所化は $K(\ell)$ と同じものである.

補題 5.3 R^3 の局所有限な胞体分割 K が平坦折り紙であるための必要十分条件は, K の任意の 1 次元胞体 ℓ に対して $K(\ell)$ が平坦折り紙となることである.

証明 必要性は明らか. 補題 4.2 より, K の任意の 0 次元胞体 p に対して, $K(p)$ が平坦折り紙であることを示せば良い. p を含む $K(p)$ の 1 次元胞体を $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m$ とする. $K(p)$ の 0, 1 次元胞体を通らず, 2 次元胞体を通る閉曲線 γ に対して, γ を $K(p)$ の 1 次元胞体 ℓ_i を一周する閉曲線 γ_i に分解する. 仮定より, 各 $K(\ell_i)$ は平坦折り紙であるから, $R(\gamma_i) = 1$ となる. 従って, $R(\gamma) = 1$ となり, $K(p)$ が平坦折り紙であることが分かる.

R^3 の胞体分割 K の局所化 $K(\ell)$ に対して, ℓ に垂直な平面 π と $K(\ell)$ の各胞体との共通部分は R^2 の胞体分割を与えるが, S^2 による場合と同様, $K(\ell)$ の π による切断と呼ぶことにする (図 5.2).

補題 5.4 ℓ に垂直な平面 π による $K(\ell)$ の切断 H は R^2 の平坦折り紙である.

証明 図 5.3 のような π 上の閉曲線 γ に対して,

$$\begin{aligned} R(\gamma) &= R(\ell_1)R(\ell_2) \cdots R(\ell_n) \\ &= R(f_1 \cap \pi)R(f_2 \cap \pi) \cdots R(f_n \cap \pi) \\ &= R(f_1)|_\pi \cdot R(f_2)|_\pi \cdots R(f_n)|_\pi \\ &= (R(f_1)R(f_2) \cdots R(f_n))|_\pi \end{aligned}$$

となる. K が平坦折り紙であることから, $R(f_1)R(f_2) \cdots R(f_n)$ は R^3 へ自明に作用する. 従って, $R(\gamma)=1$ となり H は平坦折り紙である.

命題 5.5 R^3 の局所有限な胞体分割 K に対して,

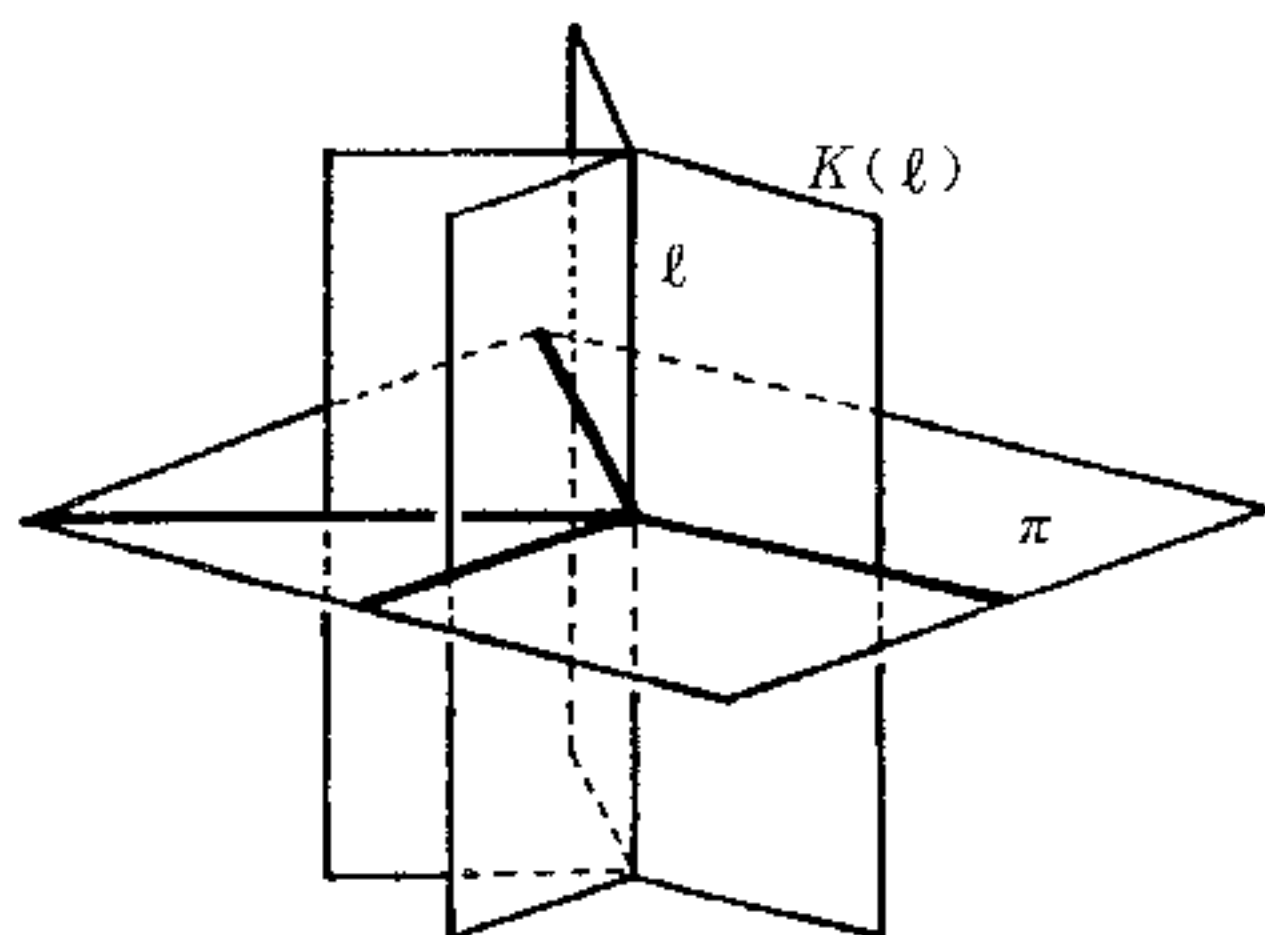


図 5.2

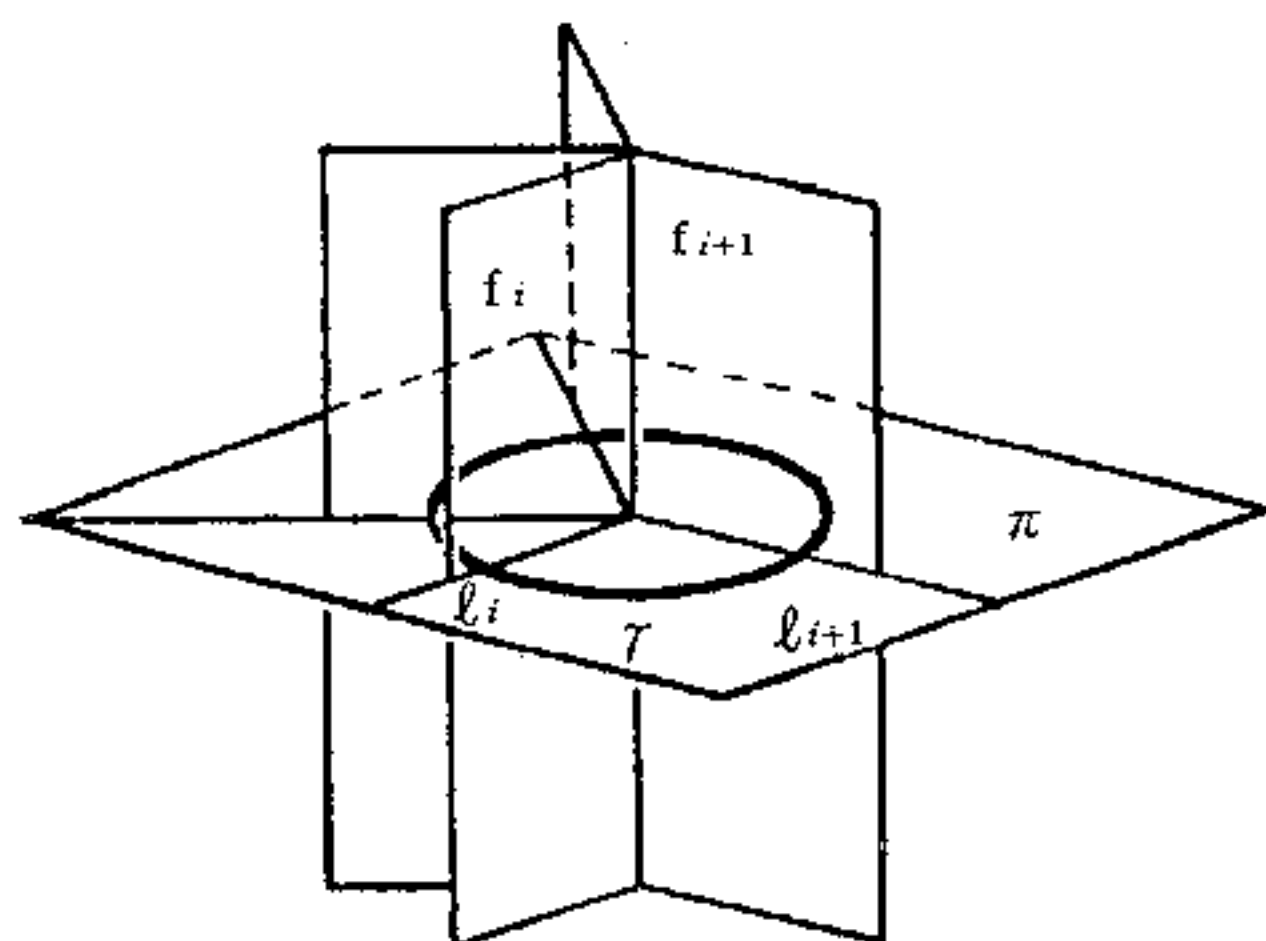


図 5.3

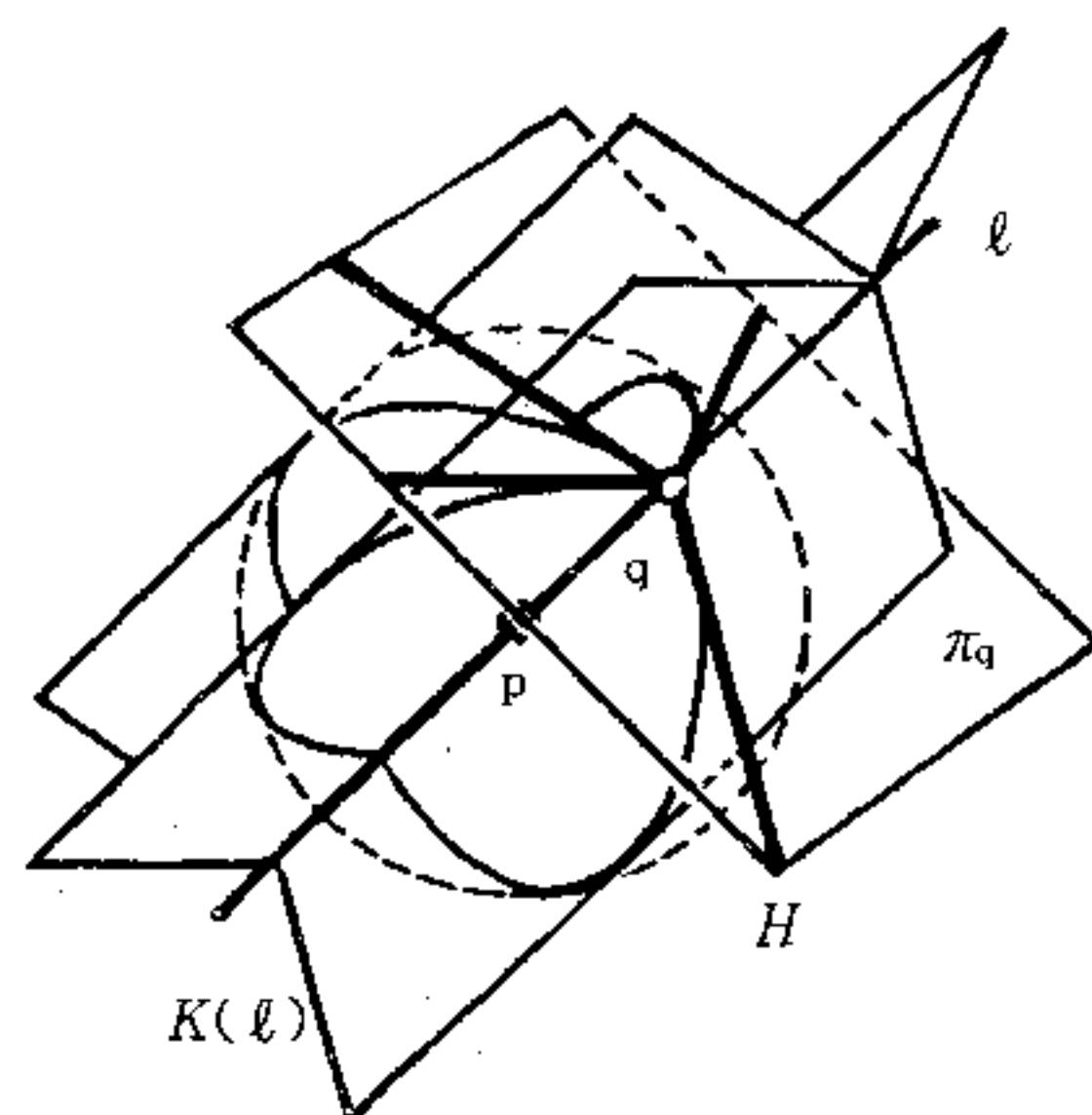


図 5.4

次の条件は同値である.

(C₁) K は R^3 の平坦折り紙である,

(C₂) K の任意の 0 次元胞体 p に対して, $K(p)$ の S^2_p による切断 k は, S^2 の平坦折り紙である.

証明 (C₁) $\implies$ (C₂) k の任意の 0 次元胞体 q に対して, 線分 pq を含む K の 1 次元胞体を ℓ とおく. 仮定より, K は平坦折り紙であるから, 補題 5.3 より $K(\ell)$ も平坦折り紙である. 補題 5.2 より, 球面 S^2_p 上の点 q における接平面 π_q による $K(\ell)$ の切断 H は, 平坦折り紙である. 一方 H は S^2_p の中心 p から接平面 π_q への $k(q)$ の中心投影像でもあるから, 補題 4.4 より k は S^2 の平坦折り紙となる (図 5.4).

(C₂) $\implies$ (C₁) 補題 4.2 より K の任意の 0 次元胞体 p に対して, $K(p)$ が平坦折り紙であることを示せば良い. つまり, $K(p)$ の 0, 1 次元胞体を通らない任意の閉曲線 γ (2 次元胞体 $f_1, f_2, \dots, f_n$ を順に貫通する) に対して, $R(\gamma)=1$ を示せば良い. γ を S^2_p に中心投影すると, その像 $\gamma' = \Pi(\gamma)$ は γ と同じ $f_1, f_2, \dots, f_n$ を順に貫通する. γ' は S^2 上の閉曲線でもあり, k の 1 次元胞体 $f_1 \cap S^2_p, f_2 \cap S^2_p, \dots, f_n \cap S^2_p$ を横切る. γ' を例 3.3 のように, k の 0 次元胞体の一つを一周する閉曲線 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ に分解する. γ_i が一周する k の 0 次元胞体を q_i とする. 線分 $p q_i$ を含む $K(p)$ の 1 次元胞体を ℓ_i とおくと, 条件 (C₂) は $K(\ell_i)$ が平坦折り紙であることを意味する. これは, $R(\gamma_i)=1$ と同じである. よって $R(\gamma_1)=R(\gamma_2)=\dots=R(\gamma_m)=1$ となり, $R(\gamma)=1$ を得る.

前章と本章の結果は次の図にまとめられる.

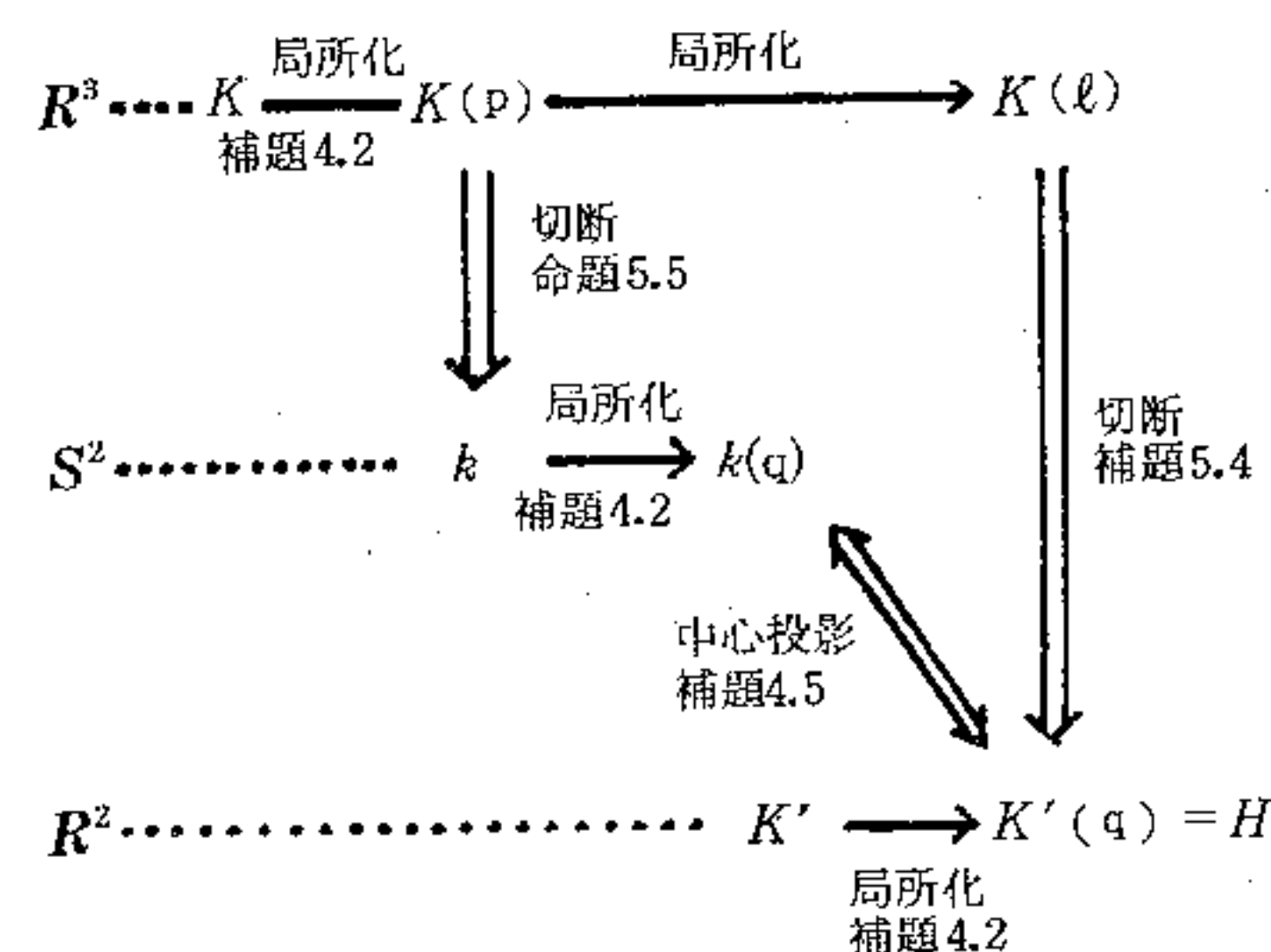


図 5.5

6. 高次の平坦折り紙

S^2 の平坦折り紙の定義は、定義4.3で、 S^2 上の線分(大円弧)のなす角度を用いて与えられた。定義2.2では、 R^2 の平坦折り紙の定義を自然に R^3 に適用して、 R^3 の平坦折り紙の定義を与えた。 R^3 と S^2 の平坦折り紙の定義は、一応独立している。命題5.5はこのふたつの関係を述べている。すなわち、 R^3 の平坦折り紙は、局所的には S^2 の平坦折り紙そのものである。そこで、 R^3 の平坦折り紙の定義を次のような形で与えることができる。

定義6.1 (R^3 の平坦折り紙) R^3 の局所有限な胞体分割 K が R^3 の平坦折り紙であるとは、 R^3 の任意の0次元胞体 p に対して、 $K(p)$ の S_p^2 による切断が S^2 の平坦折り紙になるときに言う。

これと同様に、 S^2 の平坦折り紙を R^2 の平坦折り紙から定義することができる。

定義6.2 (S^2 の平坦折り紙) S^2 の局所有限な胞体分割 k が S^2 の平坦折り紙であるとは、 k の任意の0次元胞体 q に対して、 S^2 の中心 p から q における接平面 π_q への中心投影 Π による $k(q)$ の像が、 R^2 の平坦折り紙になるときに言う。

二つの定義は、図5.5において、

$$K'(q) \rightarrow k(p) \rightarrow k \rightarrow K(p) \rightarrow K$$

と帰納的に考えたことになる。これを自然に、図5.5の左上に続けると、高次元のユークリッド空間 R^n や球面 S^n に対して、平坦折り紙の定義を与えることができる。

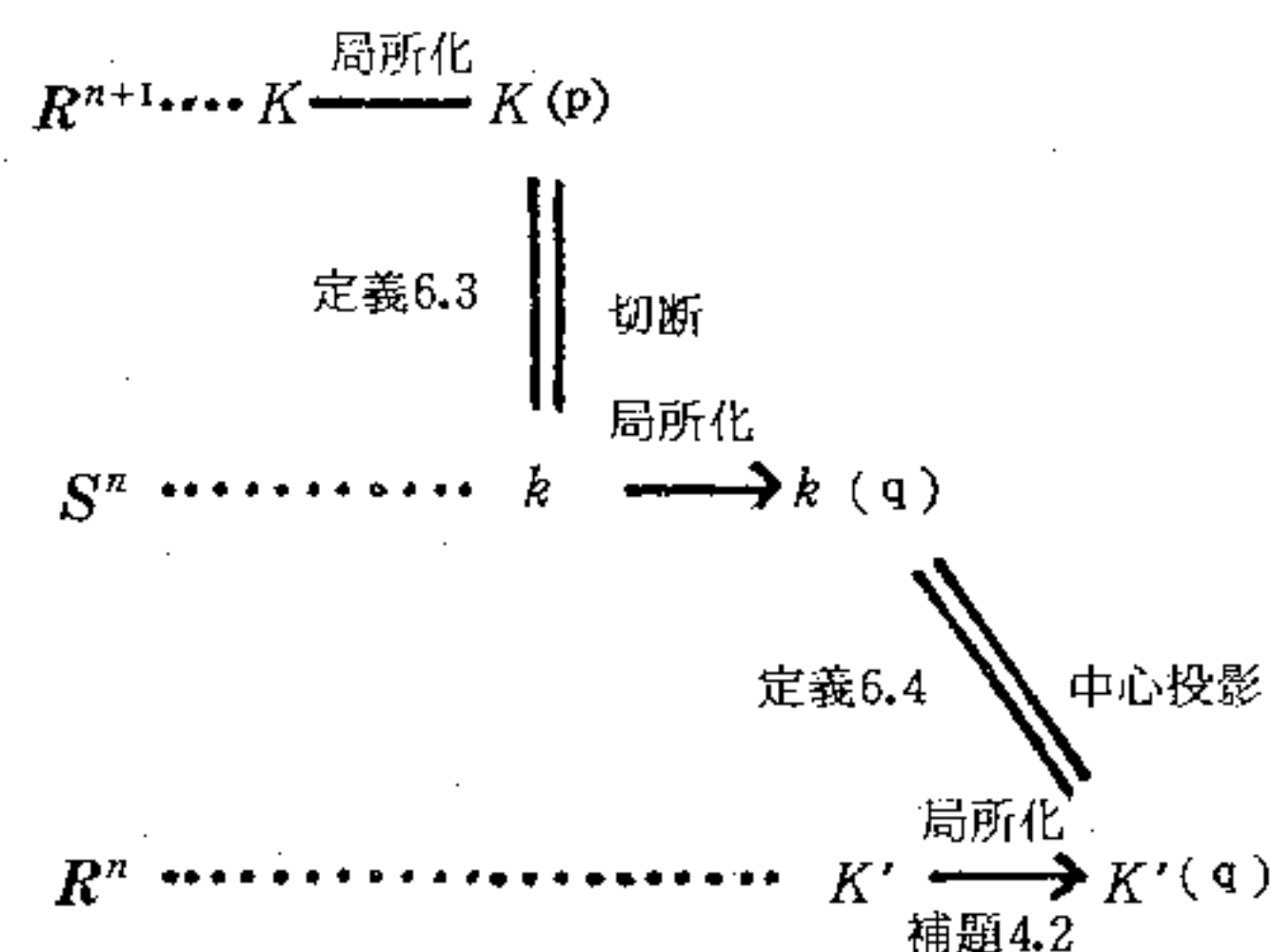


図6

定義6.3 (R^n の平坦折り紙) 2以上の自然数 n に対して、 R^{n+1} の局所有限な胞体分割 K が R^{n+1} の平坦折り紙であるとは、 R^{n+1} の任意の0次元胞体 p に対して、 $K(p)$ の S^n による切断が S^n の平坦折り紙になるときに言う。

定義6.4 (S^n の平坦折り紙) 2以上の自然数 n に対して、 S^n の局所有限な胞体分割 k が S^n の平坦折り紙であるとは、 k の任意の0次元胞体 q に対して、 q における接(超)平面 $\pi_q(\cong R^n)$ への、 S^n の中心 p からの中心投影 Π による $k(q)$ の像が R^n の平坦折り紙になるときに言う。

本章の結果をまとめると、図6を得る。

7. 1次元の平坦折り紙

前章で n が2以上の場合に、 S^n 、 R^n の平坦折り紙を帰納的に定義した。では、 S^1 、 R^1 の平坦折り紙はどうであろうか。もし S^1 の平坦折り紙と R^2 の平坦折り紙の関係が、命題5.5における S^2 と R^3 の関係と同じならば、 R^2 の局所的な平坦折り紙 $K(p)$ を p 中心の円 S^1 で切断することにより S^1 の平坦折り紙が得られるであろう。そこで、 S^1 の平坦折り紙の定義を次のように与える。

定義7.1 (S^1 の平坦折り紙) S^1 の局所有限な胞体分割 K が次の条件を満たすとき、平坦折り紙であると言う。

(i) K の0次元胞体は偶数個の点 $p_1, p_2, \dots, p_{2n}$ である、

(ii) 弧 $\ell_1=p_1p_2, \ell_2=p_2p_3, \dots, \ell_{2n}=p_{2n}p_1$ が1次元胞体であり、 S^1 の半径を1とし、 ℓ_i の長さを $d(\ell_i)$ で表すと、

$$\begin{aligned} & d(\ell_1) + d(\ell_3) + \dots + d(\ell_{2n-1}) \\ &= d(\ell_2) + d(\ell_4) + \dots + d(\ell_{2n}) \\ &= \pi. \end{aligned}$$

この定義は、命題5.5における S^2 と R^3 の関係が、 S^1 と R^2 の間にも成り立つように決めたので、次の命題が成り立つ。ただし、 S_p^1 は点 p 中心の単位円を表す。

命題7.2 R^2 の局所有限な胞体分割 K に対して、次の条件は同値である。

(C₁) K は R^2 の平坦折り紙である、

(C₂) K の任意の0次元胞体 p に対して、 $K(p)$ の

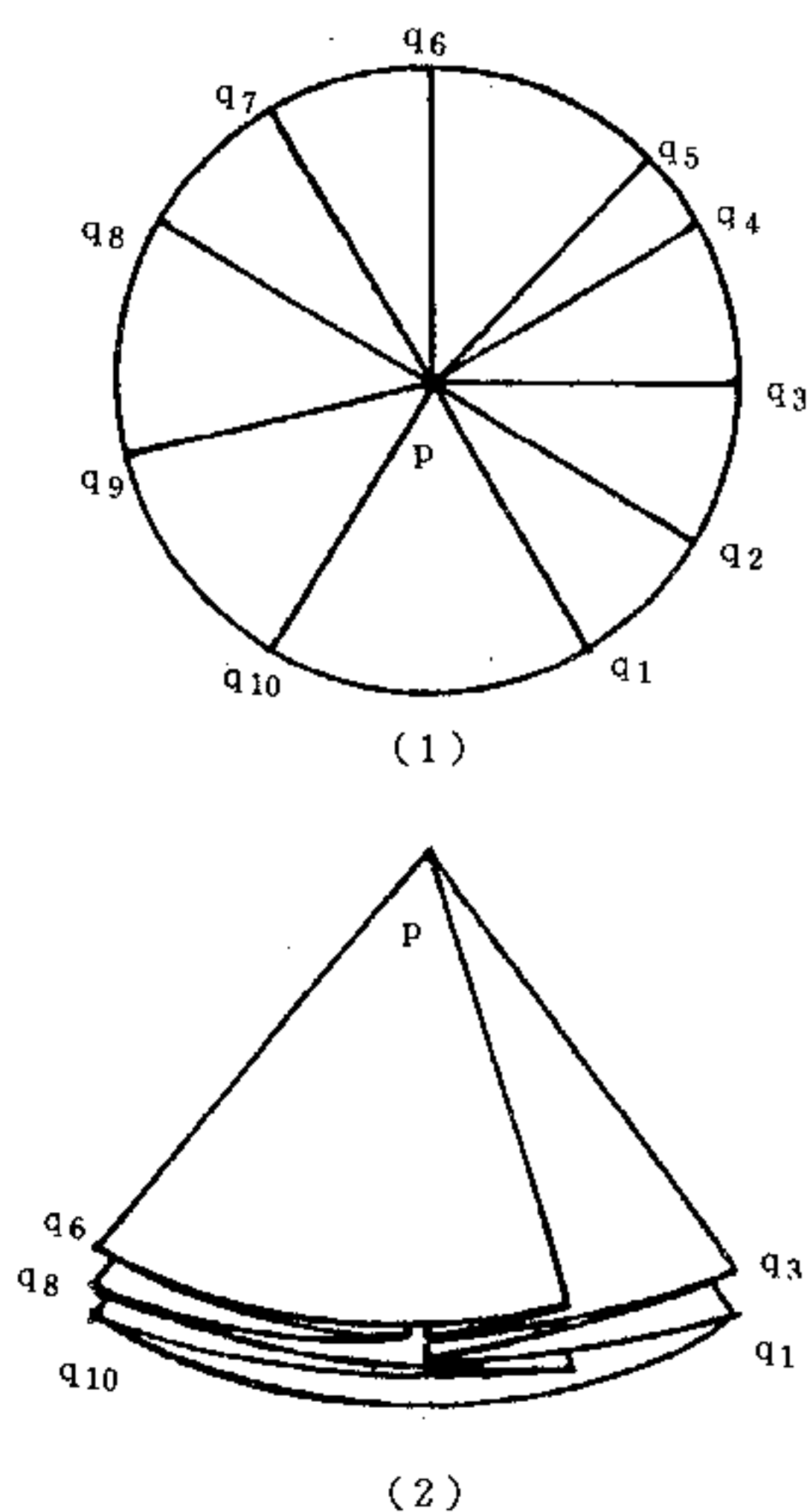


図 7.1

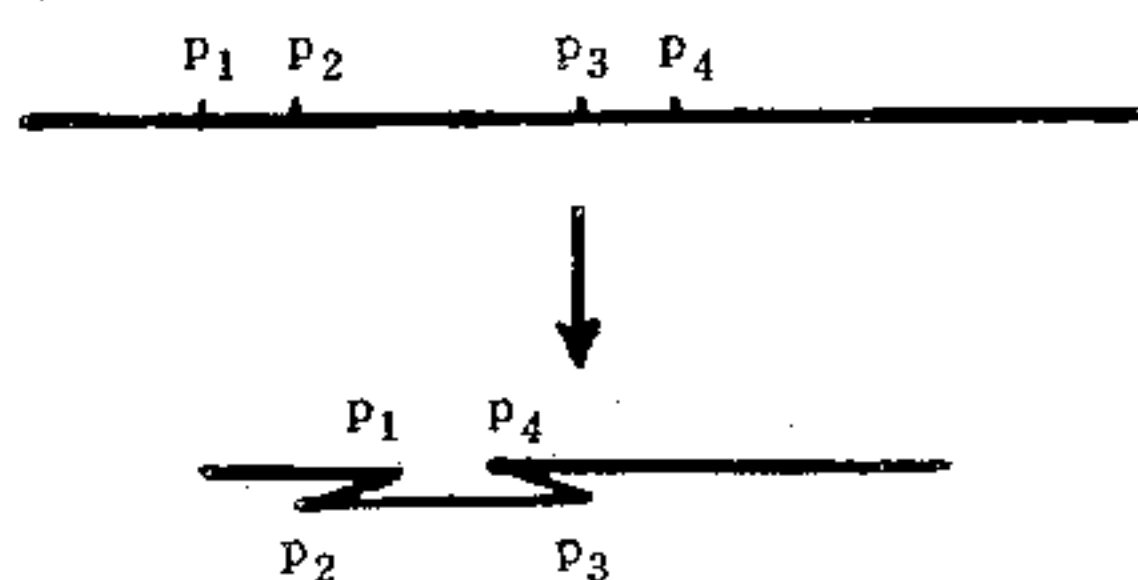


図 7.2

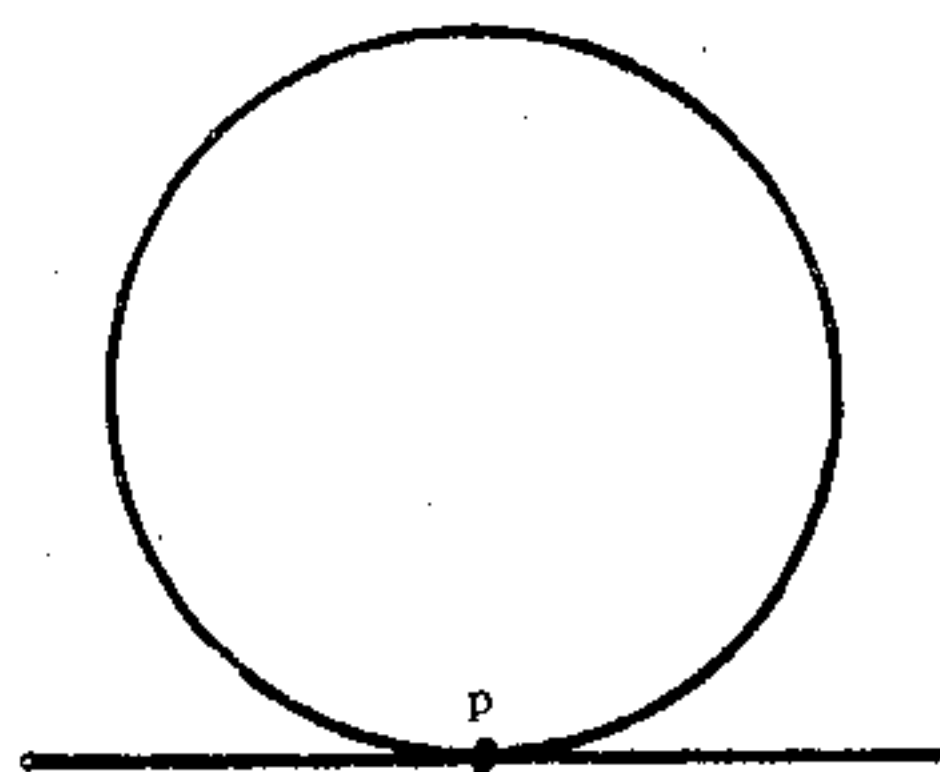


図 7.3

S^1 による切断 k は, S^1 の平坦折り紙である.

条件 (C_1) は局所的には, 図 7.1 のように円形の紙が平坦に折りたためると言うことである. 条件 (C_2) は円形の紙の縁が平坦に折りたためると言うことである. 円形の紙の内部と縁がつながっていることから, この二つの条件が同じであることは, 直観的に理解できる (図 7.1(2)).

それでは R の平坦折り紙はどうなるのであろうか. R の平坦折り紙はまっすぐのびた針金をカクカクと折り曲げたものを考えればよい. ただし, 平坦に折りたたむのだから, 図 7.2 のように折った後も一直線になっていなければならない. R^2 の平坦折り紙の定義を与えたとき, 山折り谷折りの区別は付けなかった. これは紙の不透過性を考えないことであつた. 針金を折りたたむとき, 針金のぶつかりを無視すると, 折り曲げる点に何の制約もない. 従って, 次の定義を得る.

定義 7.3 (R の平坦折り紙) R の局所有限な胞体分割を R の平坦折り紙と言う.

局所有限と言うのは, 0 次元胞体全体が R の離散的な集合となることと同じである. 補題 4.5 の中心投影が S^2 と R^2 の局所的な平坦折り紙を具体的に結びつけるものであつた. では, いま与えた S^1 と R の平坦折り紙の局所的な関係は, これと同じであろうか. 図 7.3 を見れば分かるように, 局所的にはどちらも 0 次元胞体 p とそこから両側に延びる 1 次元胞体から成るので, 中心投影によって互いに移りあう. 本章の結果を図 5.5 につなぐと図 7.4 を得る. 図の中の半分折りとは, R では一点で二分され, S^1 では円周の反対側にある二点で二分され, R^2 では一直線で二分された平坦折り紙のことである.

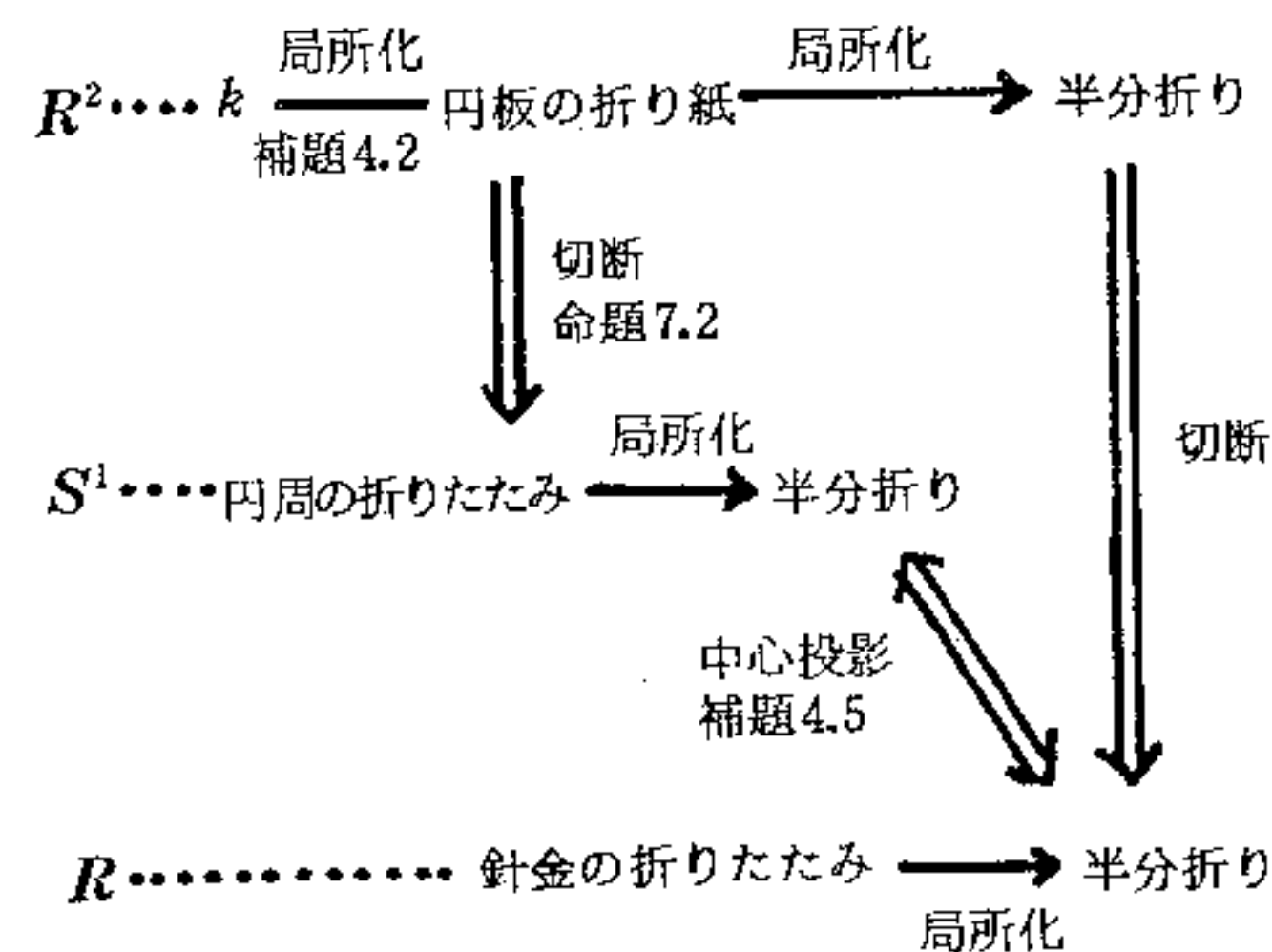


図 7.4

8. ま と め

図5.5, 図6, 図7.4を見れば分かるように, ユークリッド空間(全体)の平坦折り紙がなくても, 局所的な平坦折り紙さえあれば, 球面の平坦折り紙と合わせて高次元の平坦折り紙が帰納的に定義出来る. 特に, R^3 の局所的な平坦折り紙を調べることは, 球面 S^2 (全体)の平坦折り紙を研究することと同じであった. R^2 と違って S^2 はコンパクトであるから, S^2 の平坦折り紙は1次元胞体に着目して, 有限個の点, 辺, 面からなるグラフとして考察することが出来る. この結果の紹介は別の機会にする.

参 考 文 献

- [1] 伏見康治, 伏見満枝, 『折り紙の幾何学』, 日本評論社 (1979).
- [2] 川崎敏和, 『2次元結晶群の作用で不変な区分的等距離交換』, 九州大学大学院博士後期課程単位修得論文 (1983).
- [3] 川崎敏和, 「結晶折り紙」, 佐世保工業高等専門学校研究報告, 第23号 (1986), 91—99.
- [4] 川崎敏和, 「立体的な結晶折り紙について」, 佐世保工業高等専門学校研究報告, 第24号 (1987), 101—109.