

平坦折り紙の山折り線と谷折り線の関係

川崎 敏 和

On relation between mountain-creases and valley-creases
of a flat origami

T. Kawasaki

佐世保工業高等専門学校研究報告 第27号抜刷

1990年12月20日発行

佐世保工業高等専門学校

857-11 佐世保市沖新町 1-1

平坦折り紙の山折り線と谷折り線の関係*

川崎 敏和**

1. はじめに

これまで [7], [10]—[12], [34] で平坦に折りたたんだ折り紙を広げたときについている折り線の構造を調べてきた。主な結果は次のようなものである。

Proposition (定理) 1. 1 ([7]) 平坦に折りたたんだ折り紙を広げたとき紙についている折り線の任意の頂点 P と P から延びている折り線 $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_N (= \ell_0)$ に対して、

(1) N は偶数、

(2) ℓ_{i-1} と ℓ_i の成す角度を α_i とおくと、

$$\alpha_1 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{N-1} = \alpha_2 + \alpha_4 + \dots + \alpha_N = \pi$$

が成り立つ。

条件(1), (2)は(3)と同値である。

(3) 折り線の頂点を通らない任意の閉曲線 γ に対して、 γ が折り線 $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m$ と順に交わるならば、

$$R(\ell_1)R(\ell_2)\dots R(\ell_m)=1$$

ただし $R(\ell_i)$ は折り線 ℓ_i に関する対称移動、1 は恒等写像である (図 1. 1)。

(1)~(3)は平坦に折りたたむための必要条件なので平坦条件と呼んだ。しかし平坦条件は十分条件ではない。すなわち、平坦条件を満たしていても、実際には平坦に折りたためないことがある。図 1. 2 の折り紙は(1), (2)を満たすが折りたためない。実際に折りたたむには折り線のどれを山折りしどれを谷折りするか決めなくてはならないが、この折り紙の場合、どのように山折り線と谷折り線を配置しても平坦に折りたたむことができないのである。なぜ平坦に折りたためないのか。本稿ではその原因を調べる。

2. 山折り谷折り

山折り線と谷折り線を次のような写像で表す。

Definition

(定義) 2. 1 (山谷写像と実現) 平坦条件を満たす折り紙 K の折り線全体の集合 $K_1 = \{\ell\}$ から $\{\pm 1\}$ への写像 ι を K の山谷写像と呼ぶ。さらに、 $\iota(\ell) = 1$ なる ℓ を谷折りし、 $\iota(\ell) = -1$ なる ℓ を山折りして実際に平坦に折りたたむことができるとき、 ι を K の実現と呼ぶ。

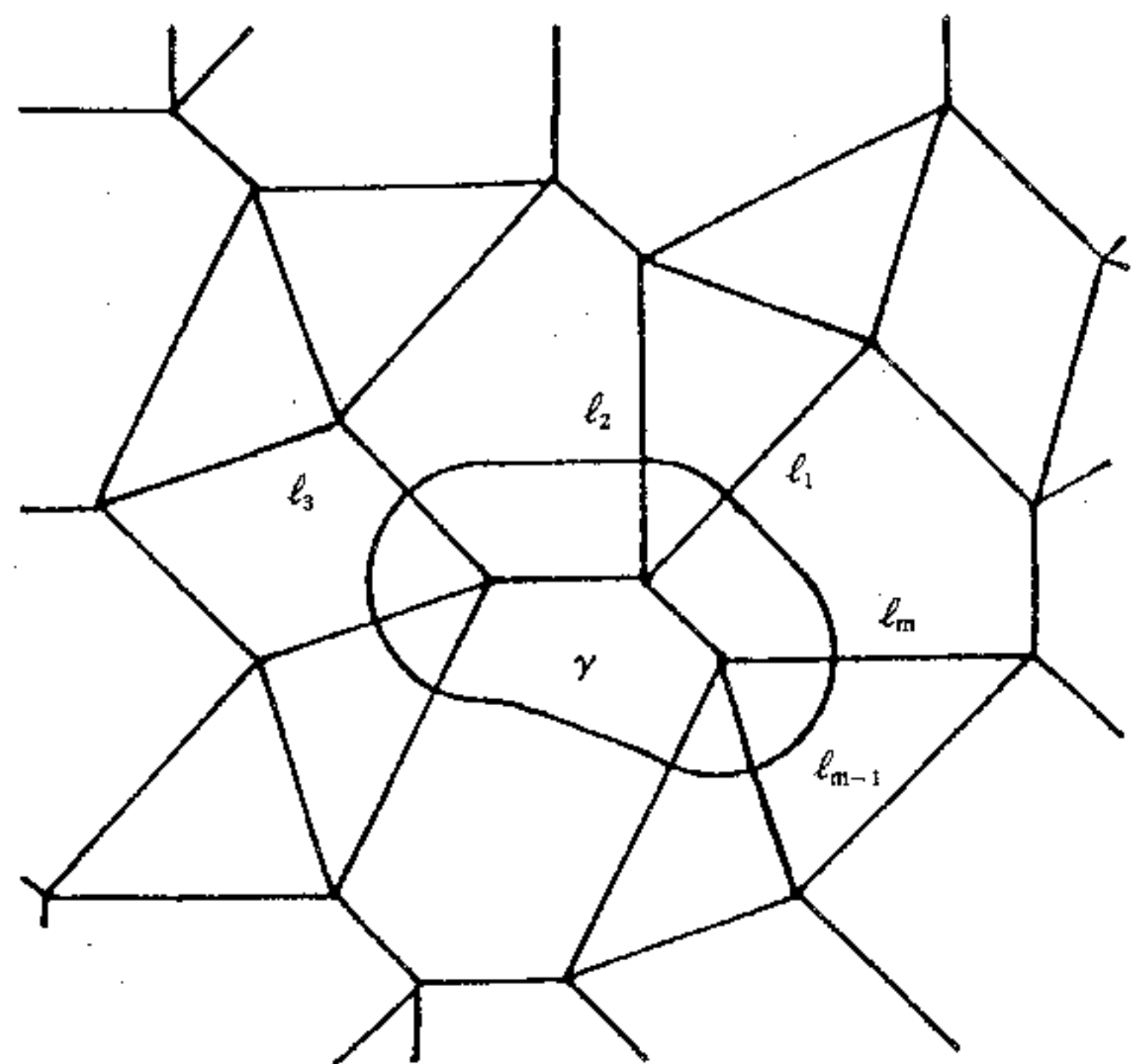


図 1. 1

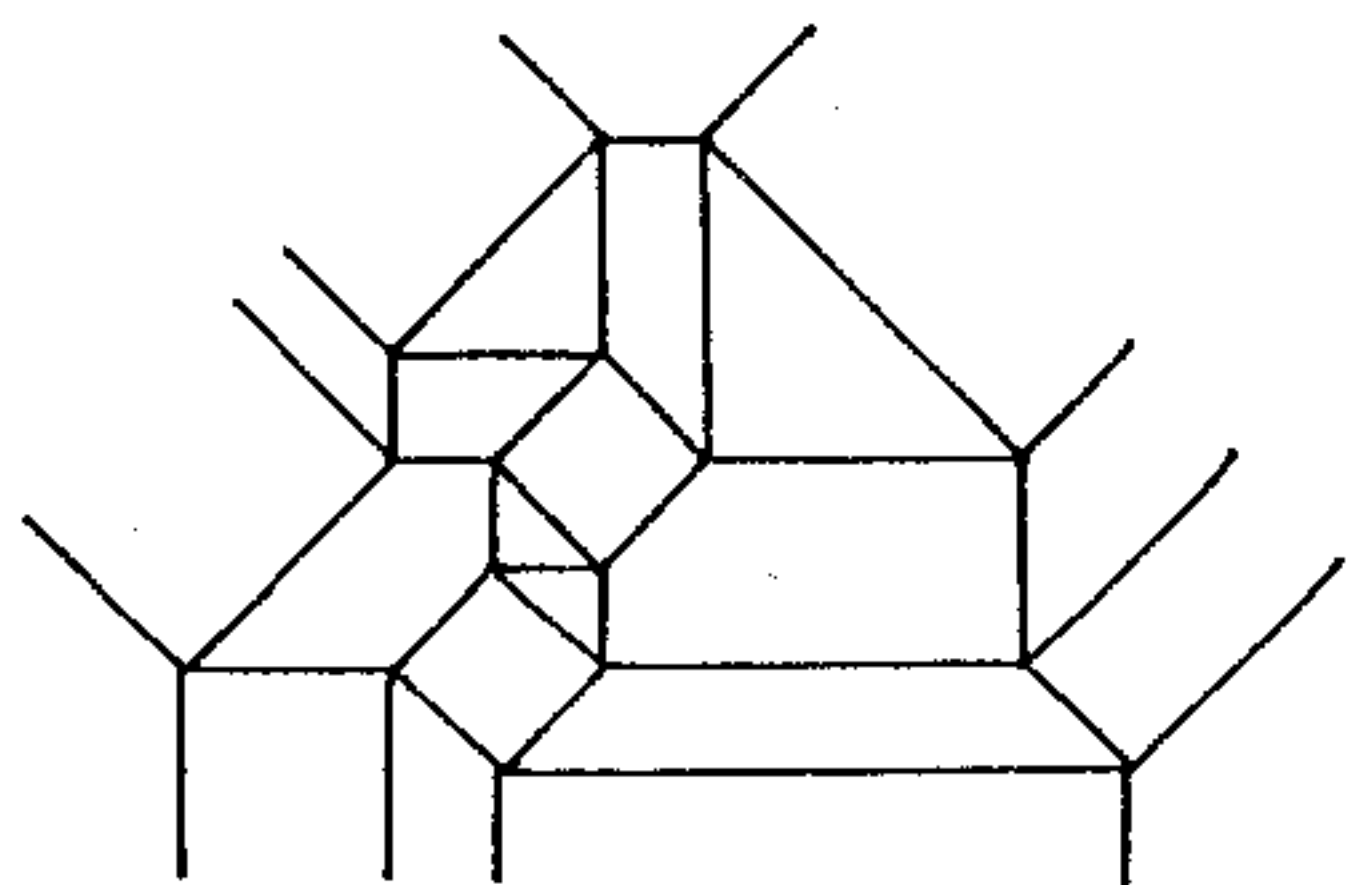


図 1. 2

*原稿受付 平成 2 年 9 月 17 日

**佐世保工業高等専門学校

例 2.2 図 2.1(1)の折り紙 K は平坦条件を満たす。 ι が K の実現となるのは、 $\iota^{-1}(1) = \{\ell \in K; \iota(\ell) = 1\} = \{\ell_1\}, \{\ell_4\}, \{\ell_2, \ell_3, \ell_4\}, \{\ell_1, \ell_2, \ell_3\}$ の 4 つである。後 2 つは前 2 つの山谷を逆にしたものである。

例 2.3 図 2.1(2)の折り紙 K には頂点が 2 つあり、各頂点で平坦条件を満たす。 K を例 2.2 の組み合わせと考えると、 $4 \times 2 = 8$ 通りの実現があることになる。しかし、 ι が K の実現となるのは、 $\iota^{-1}(1) = \{\ell_1, \ell_3, \ell_4, \ell_5\}, \{\ell_1, \ell_3, \ell_4, \ell_6, \ell_7\}, \{\ell_2, \ell_6, \ell_7\}, \{\ell_2, \ell_5\}$ の 4 つだけである。

例 2.4 図 1.2 の折り紙に対して、実現 ι は存在しない。証明は次節で与える。

3. 円板の平坦折り紙の山谷の基本的な関係

図 1.2 の折り紙は計算機を使って見つけたもので、かなり複雑である。例 2.2 のように 1 点から延びた折り線の山谷を調べよう。このような折り紙を折るとき、無限に広い平面を折ることを考えても、頂点の近くを丸く切りとって折っても折り線の山谷の関係は同じなので、本節では円板状の折り紙を折りたたむことを考える。

まず、[7] の 2 章 3 節の結果をもう少し詳しく解説する。円板の平坦折り紙が実際に平坦に折りたたまれるなら、その過程は図 3.1 のようになる。各面(扇形)で生成される錐体と平面との共通部分は $2n$ 角形になるが、折りたたまれていく過程でその内角の和は一定値 $(2n-2)\pi$ をとるので、最終的に折

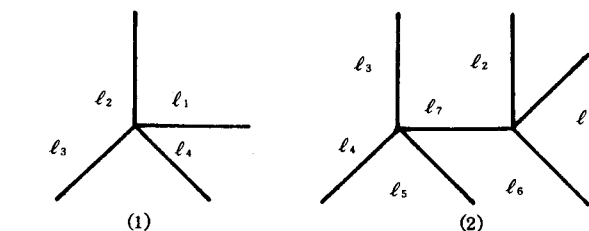


図 2.1

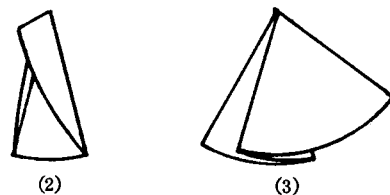
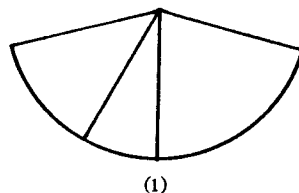
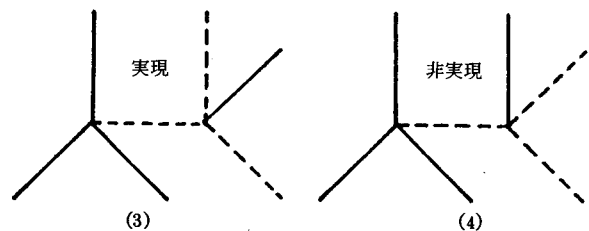


図 3.2

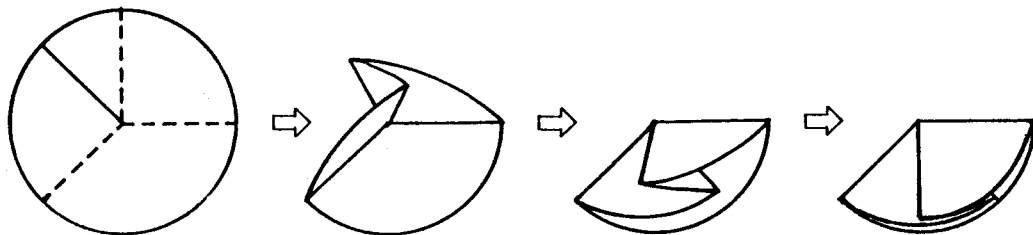


図 3.1

りたたまれたとき、谷折り線の数 $\times 0$ + 山折り線の数 $\times 2\pi = (2n - 2)\pi$ となる。従って、山折り線の数 $= n - 1$ で、谷折り線の数 $= 2n - (n - 1) = n + 1$ となる。紙を裏側から見ると山谷が逆になるので、折り線の山谷に関する最も基本的な定理を得る。

Proof.
定理3.1 ([7]) 円板の平坦折り紙が、実際に平坦に折りたたまれるなら、

山折り線の数と谷折り線の数之差 $= 2$ となる。

折り線が4本の場合には、この定理から、山折り線の本数は1本か3本になる。このような山谷の配置は8通りあるが、例2.2のように、実際に折りたためるのはそのうちの4つだけである。このように定理3.1だけでは、山折り線と谷折り線の配置までは把握できない。山折り線と谷折り線の配置を詳しく記述するため記号を整理する。中心 C 、半径1の円形の紙に平坦条件を満たす折り線(半径) $\ell_0 = CA_0$, $\ell_1 = CA_1, \dots, \ell_{2n-1} = CA_{2n-1}, \ell_{2n} = CA_{2n} (= \ell_0)$ を引いたものを円板の平坦折り紙と呼ぶ。また $\angle A_i CA_{i-1}$ を α_i で表す。

図3.2(1)のように狭い面が広い面の間にはさまれた扇形を折りたたむとき、同じ側に折ろうとすると(2)のように紙がぶつかってしまうので、同じ側に折ることができない。そこで、

Corollary Lemma

補題3.2 ([7]) 円板の平坦折り紙 K とその実現 ι に対して、折り線のなす角が $\alpha_{i+1} < \alpha_i$ かつ $\alpha_{i+1} < \alpha_{i+2}$ を満たすならば $\iota(\ell_i)\iota(\ell_{i+1}) = -1$ となる。

折り線が4本の場合には、定理3.1と補題3.2から、さらに詳しい結果が得られる。

Corollary 3

系3.3 ([7]) 折り線が4本の円板の平坦折り紙 K とその実現 ι に対して、4つの角 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ が、 $\alpha_2 < \alpha_1$ と $\alpha_2 < \alpha_3$ を満たすならば、

$$(1) \quad \iota(\ell_1)\iota(\ell_2) = -1,$$

$$(2) \quad \iota(\ell_3)\iota(\ell_4) = 1$$

が成り立つ。

例3.4 図3.3(2)は(1)を折りたたんだものである。

破線は谷折り線、実線は山折り線を表わす。この折り紙はレンガ折りと呼ばれ、藤本修三氏と桃谷好英氏によって独立して考え出されたものである。折り線の頂点がたくさんあるが、各頂点の近くを丸く切り抜いたものは、その部分だけでも平坦に折りたためるから系3.3は適用できる。(3)の台形に着目しよう。 ℓ_1 は山折り、 ℓ_2, ℓ_3, ℓ_4 は谷折りであるが、 ℓ_1 を谷折りに変えると系3.3(1)により ℓ_2 と ℓ_4 は山折りになる。さらに系3.3(2)により ℓ_3 は山折りになる。このように、 ℓ_1 の山谷を逆にすると、3本の折り線 ℓ_2, ℓ_3, ℓ_4 も同時に山谷を逆にしなくてはならない。図3.3(4)は、この4つの折り線の山谷を逆にして折りたたんだものである。(2)と比べると、台形状のポケットが裏返っていることがわかる。また、横長台形の折り線の山谷を全て逆にすると図3.3(5)のようになる。これは、[33]の『アジサイ』とほとんど同じものである。

例3.5 例3.4のように規則的な平坦折り紙は[16]で平織りと呼ばれている。これは、2次元結晶群の作用で不変な折り線構造を持つので、[7]では結晶折り紙と呼んだ。図3.4(1)は $p4$ 型の結晶群の作用で不変な結晶折り紙である。なお、例3.4の結晶折り紙は cmm 型の結晶群の作用で不変である。図3.4(2)は(1)を折りたたんだものであり、平行四辺形が先の台形と同じ役割をする。図3.4(3)の平行四辺形で ℓ_1 を山折りすると、系3.3(1), (2)式より、 ℓ_2 は山折り、 ℓ_3 と ℓ_4 は谷折りしなくてはならない。そして4つの辺のどれかひとつの山谷を逆にすると、残り3つの辺の山谷も逆にしなくてはならない。

これら平行四辺形や台形のように、山谷を逆にするときの最小単位を、山谷の底と呼ぶことにする。

例2.4の平坦折り紙の底の構造を調べると、実現 ι が存在しないことが次のように証明される。

実現 ι が存在すると仮定する。この折り紙の底のひとつは図3.5(1)のようになる。いま仮に折り線 ℓ_1 を山折りしたとしよう。系3.3(2)により ℓ_2 と ℓ_3 は山折りになる。さらに系3.3(1)により、 ℓ_4 は谷折りになる。これを繰返すと図3.5(2)のように折り線の山谷が順に決まり、最後に ℓ_{18} が谷折りになる。ここで ℓ_1 と ℓ_{18} のなす角は $\pi/4$ であるから、系

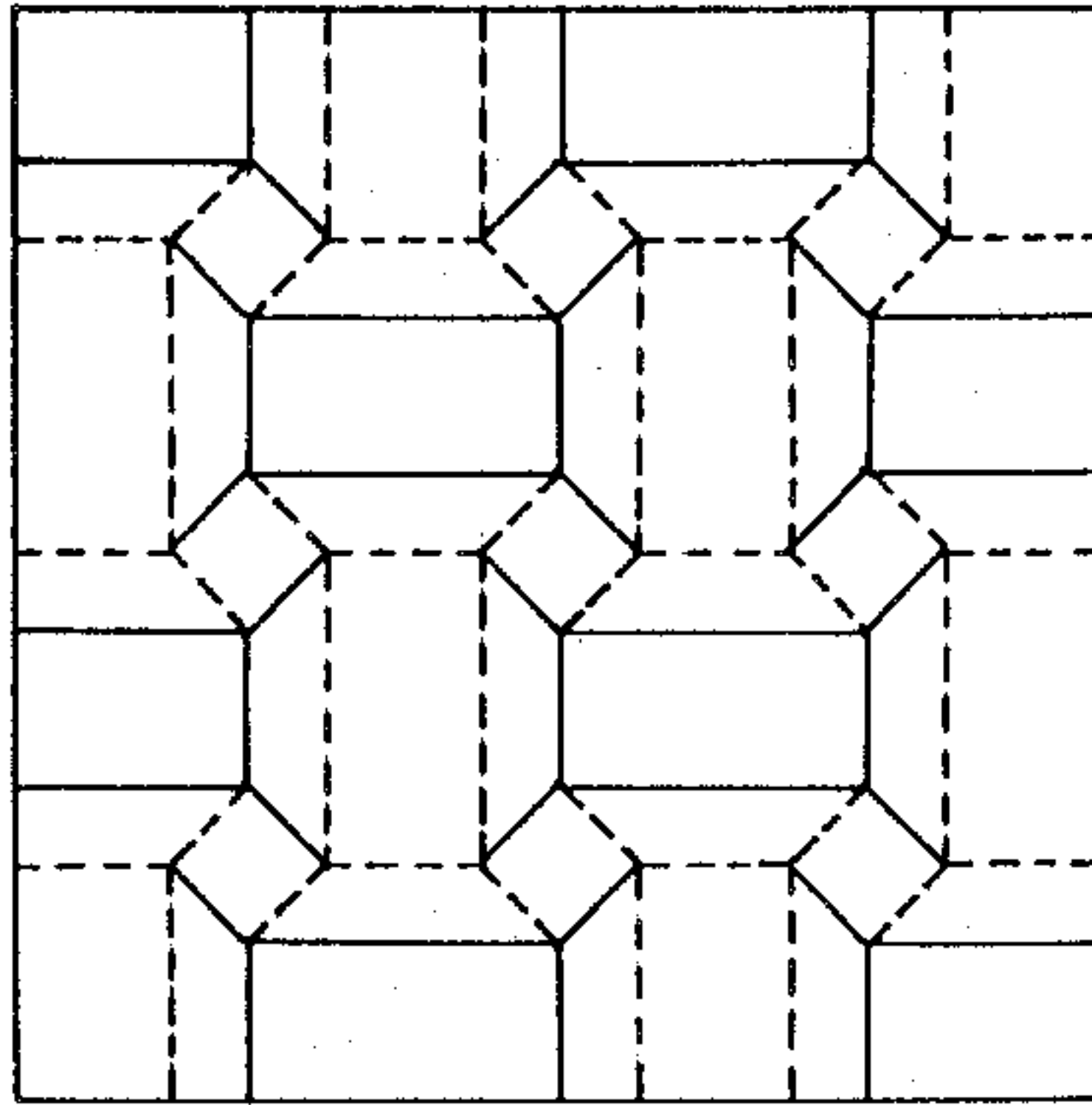
3.3(1)により, ℓ_1 は谷折でなければならない. しかしこれは最初に ℓ_1 を山折りしたことに矛盾する. よって, 実現 ι は存在しない.

Caution

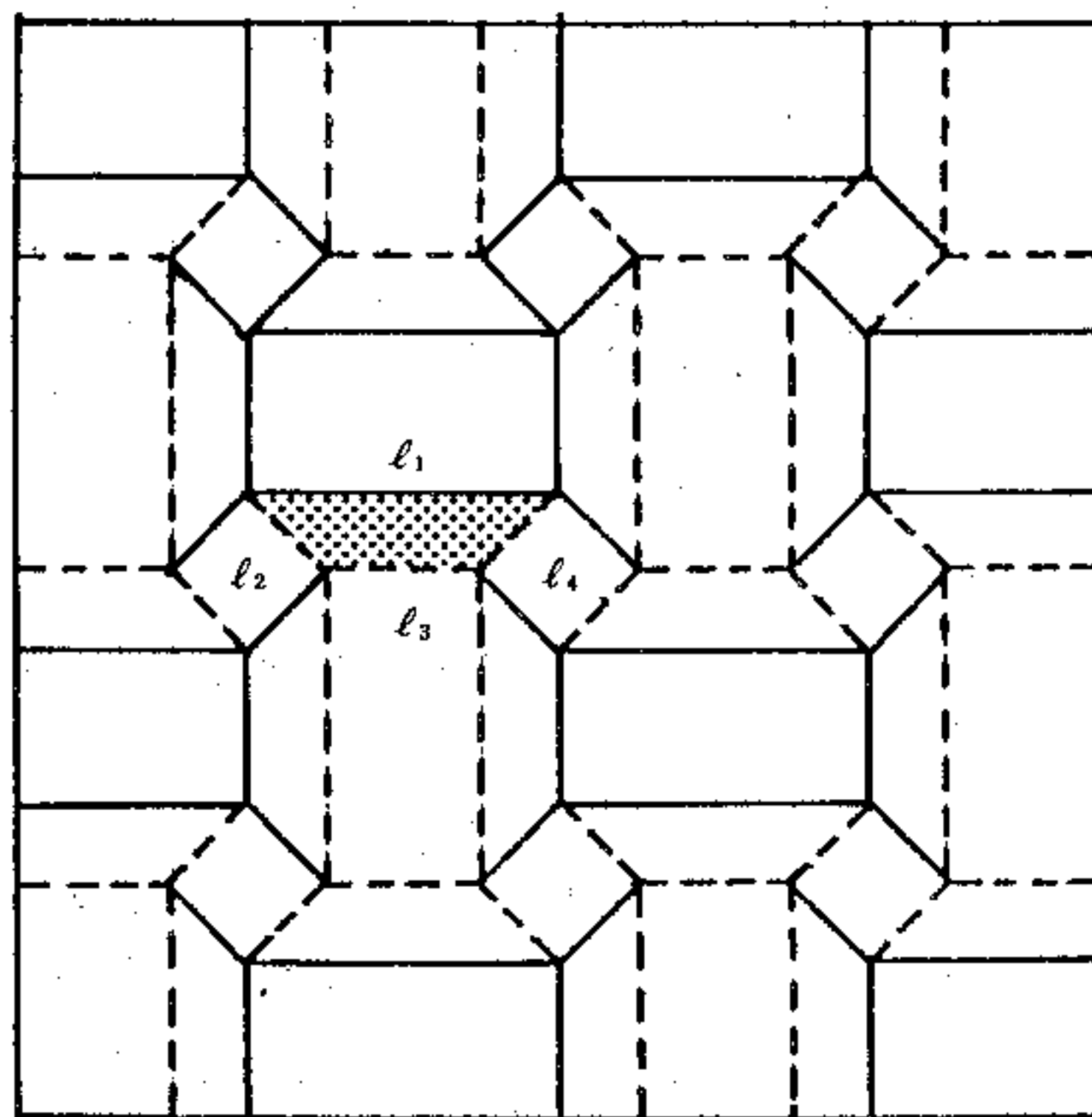
注意: 図 3.6(1)の点A, B, C, Dのように, 折り線が4本出ていても, 系3.3の仮定を満たさない場合には, 山谷の底が存在するとは限らない.

4. 円板の平坦折り紙の山谷の存在定理

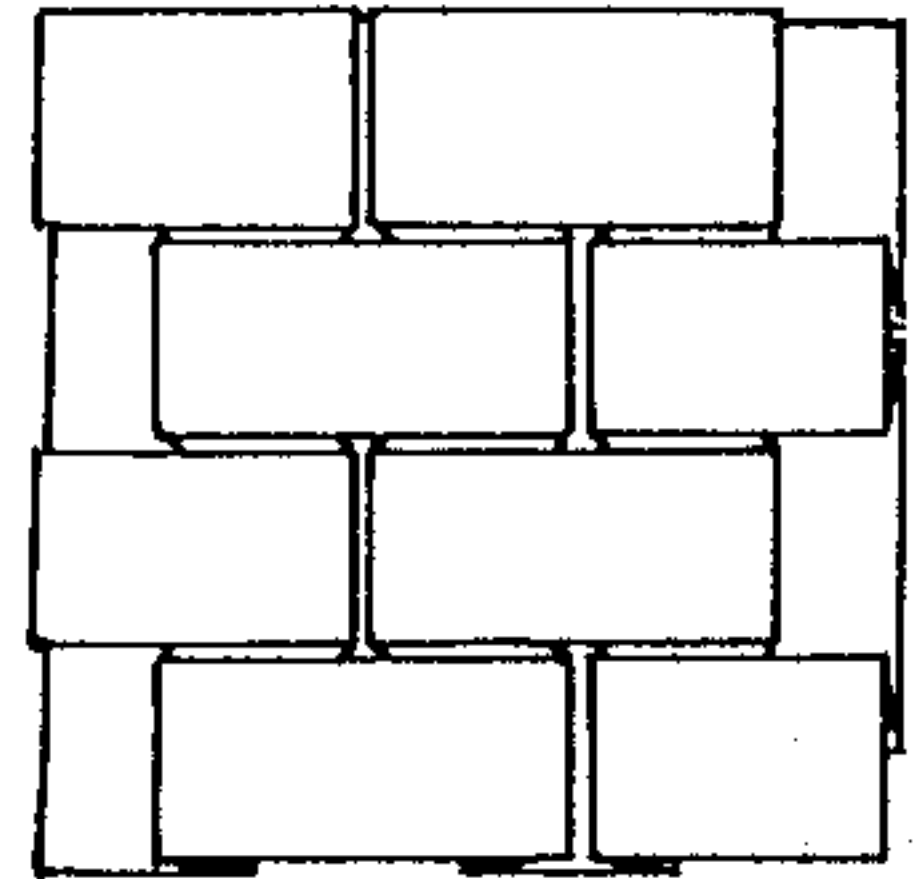
[7]では, 折り線の山谷の詳しい関係は, 系3.3のように折り線の数 $2n$ が4の場合しか述べていない. 本節では, $2n \geq 4$ の場合を考察する. 図4.



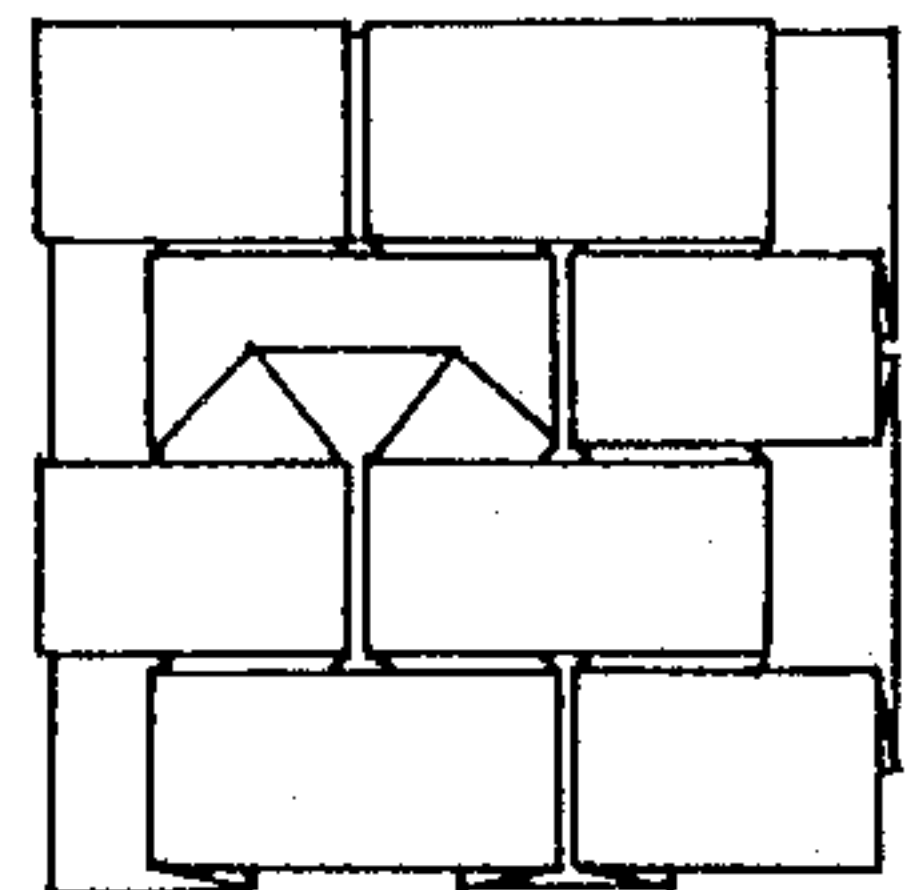
(1)



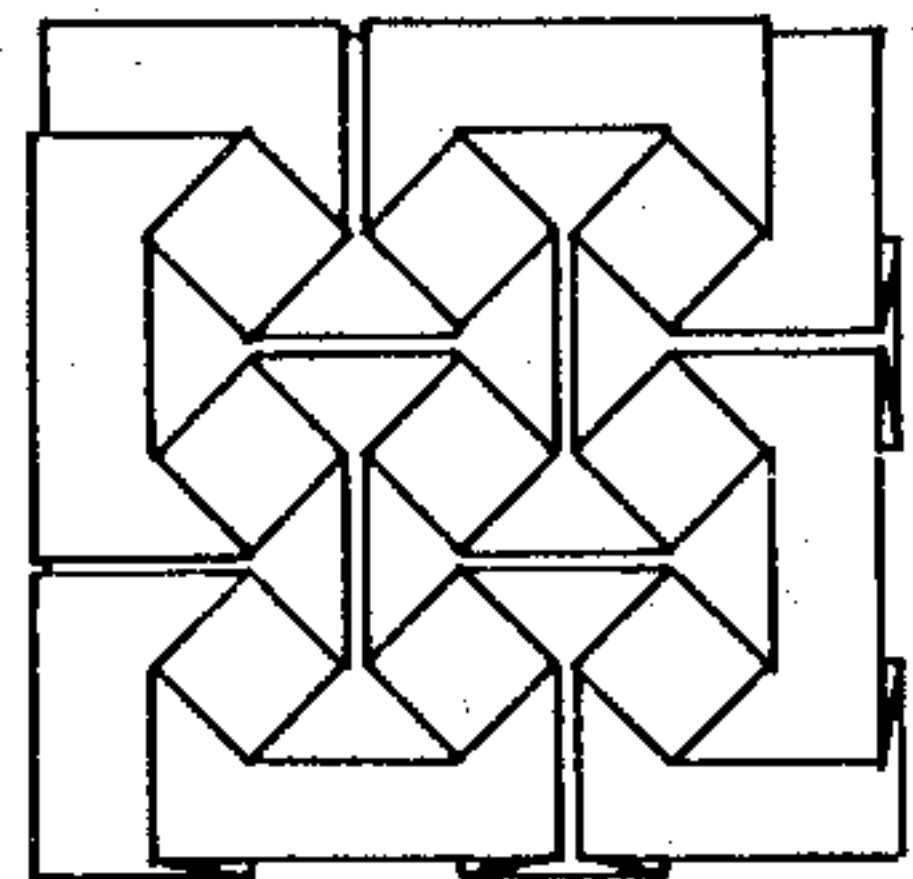
(3)



(2)

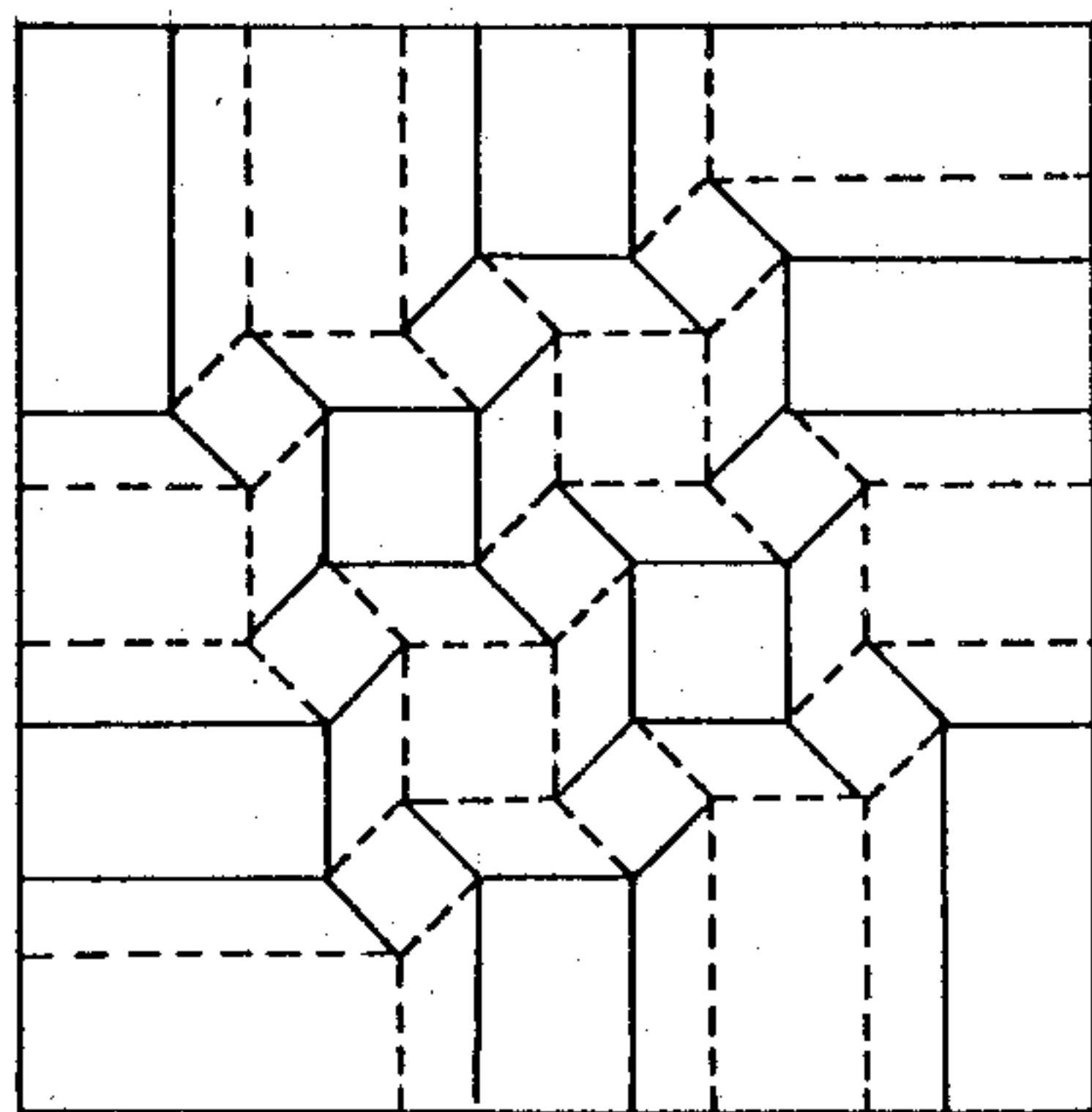


(4)

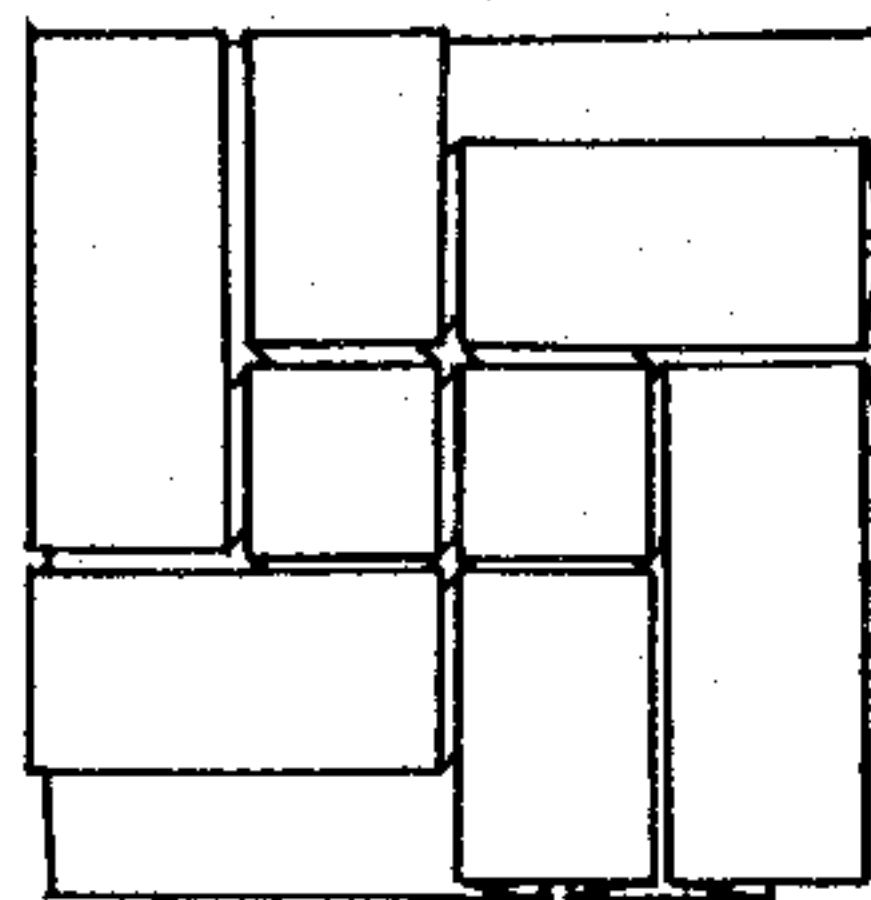


(5)

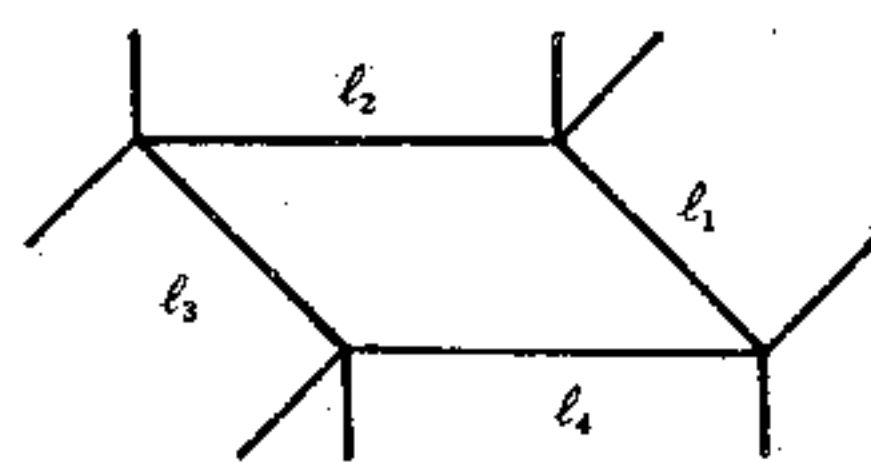
図 3.3



(1)

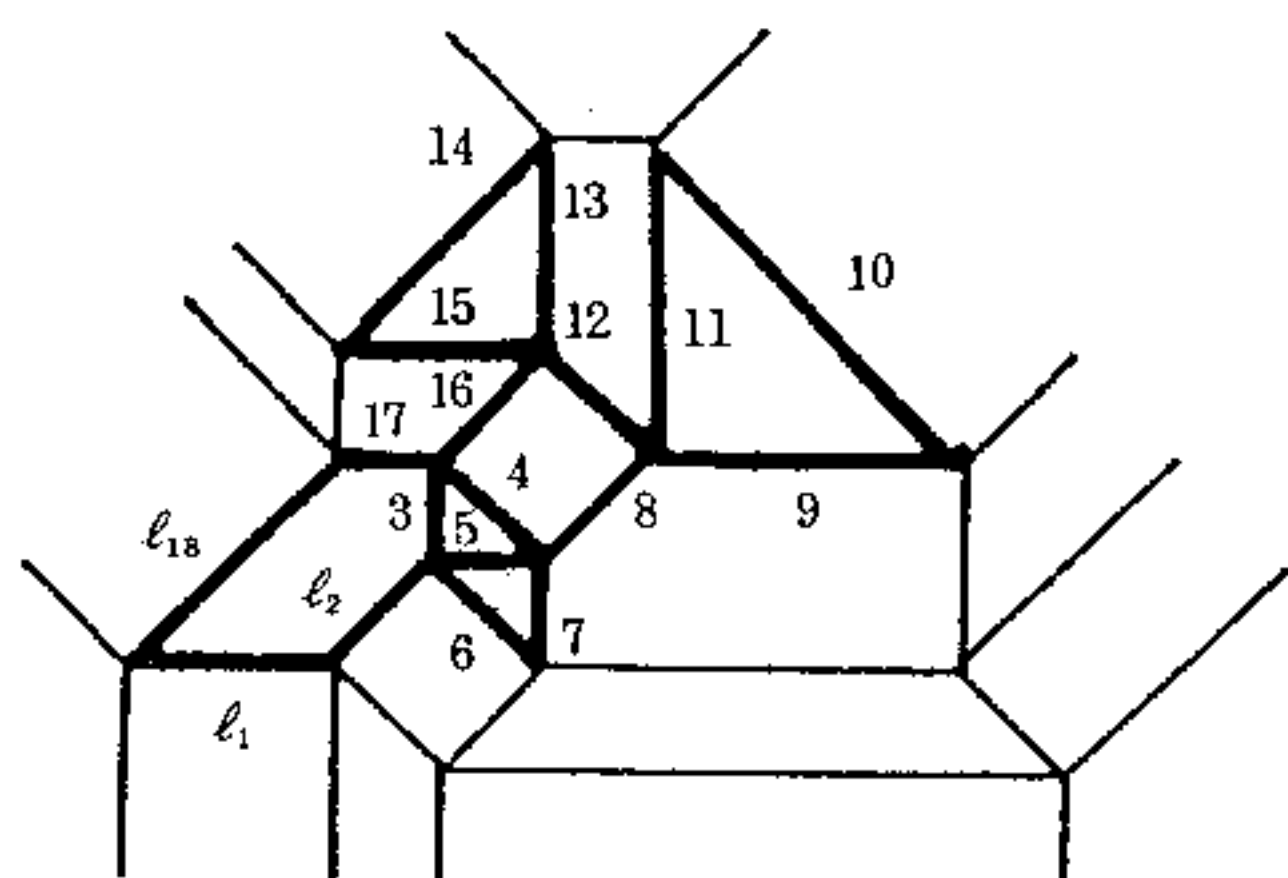


(2)

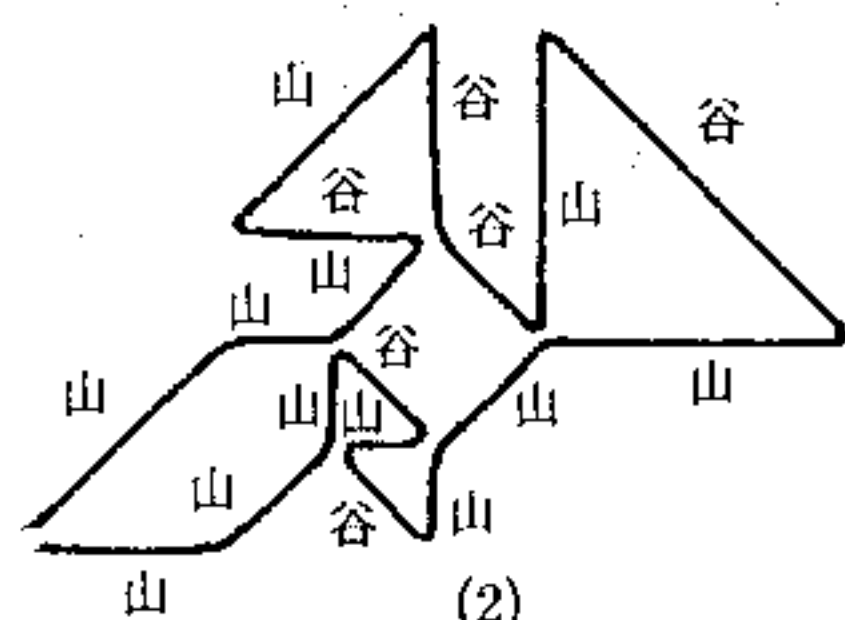


(3)

図 3. 4

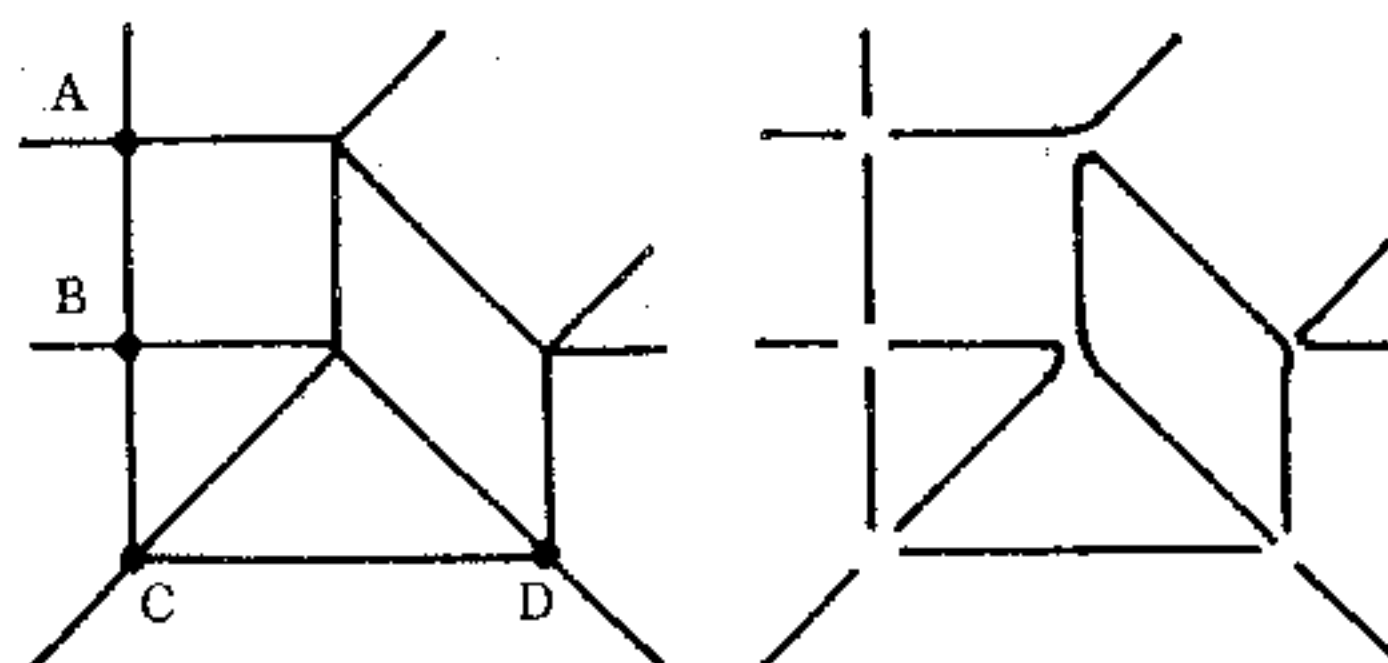


(1)



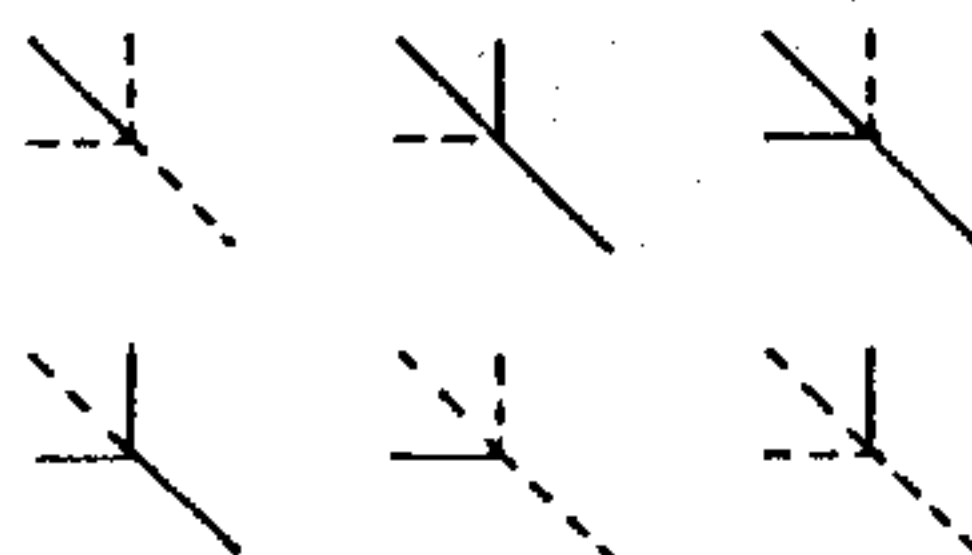
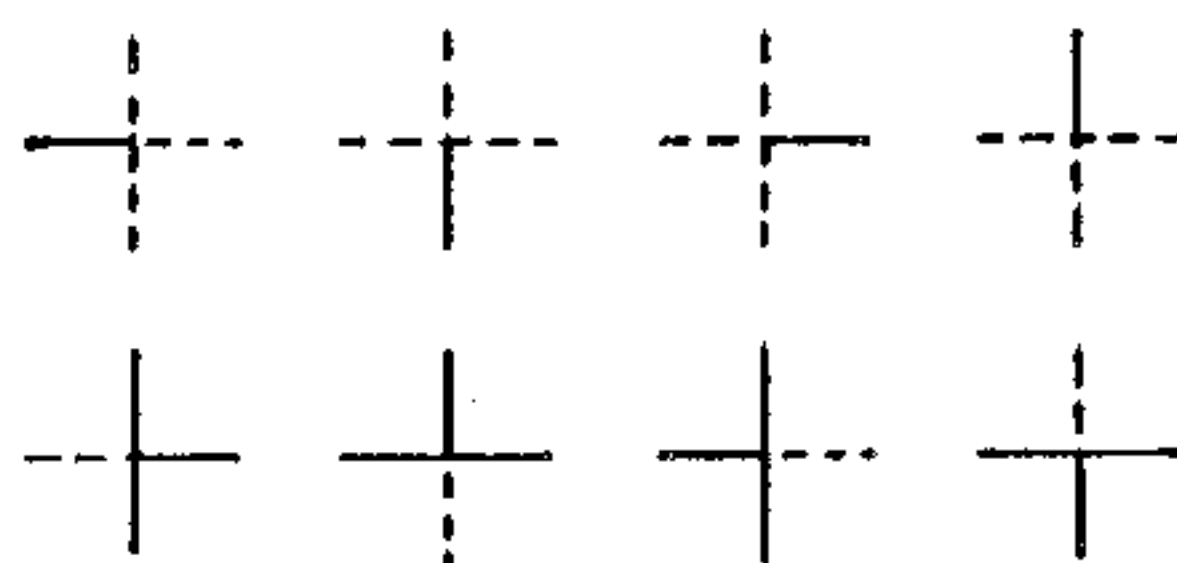
(2)

図 3. 5



(1)

(2)



(3)

図 3. 6

1のように点 A_0 を出発し円周を一周する動点 P を考える.そして媒介変数 $t = \angle A_0 C P$ を用いて $P = P(t)$ と表わす.特に, $A_1 = P(t)$ となる t を t_1 と書く(図4.2).図4.3のように折り線 ℓ_0 に切り込みを入れ, $\ell_1, \ell_3, \dots, \ell_{2n-1}$ を谷折り, $\ell_2, \ell_4, \dots, \ell_{2n-2}$ を山折りして平坦にたたむ.折りたたんだ後,点 $P = P(t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$)の円周部分に沿った座標(A_0 を原点とする)を $x(t)$ あるいは $x(P)$ で表わす.

Definition alternatives for folding disk flat

定義4.1 (円板の平坦折り紙の交代おれ線) 円板の平坦折り紙に対して, 関数

$$x: [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$$

の像を図4.3や図4.4(1)のようなおれ線で表わし, 交代おれ線と呼ぶ. さらに, 区間 $[\alpha, \beta]$ に対応するおれ線の一部を $P(\alpha) \rightarrow P(\beta)$ で表わす.

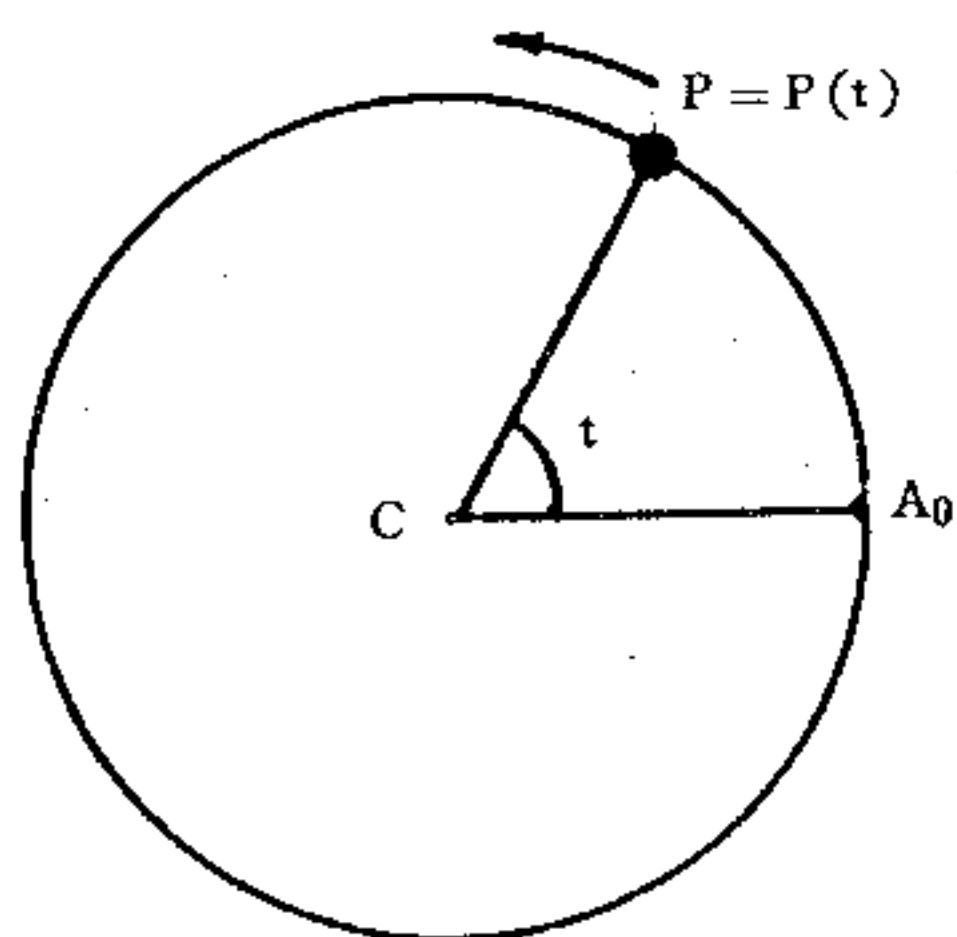


図4.1

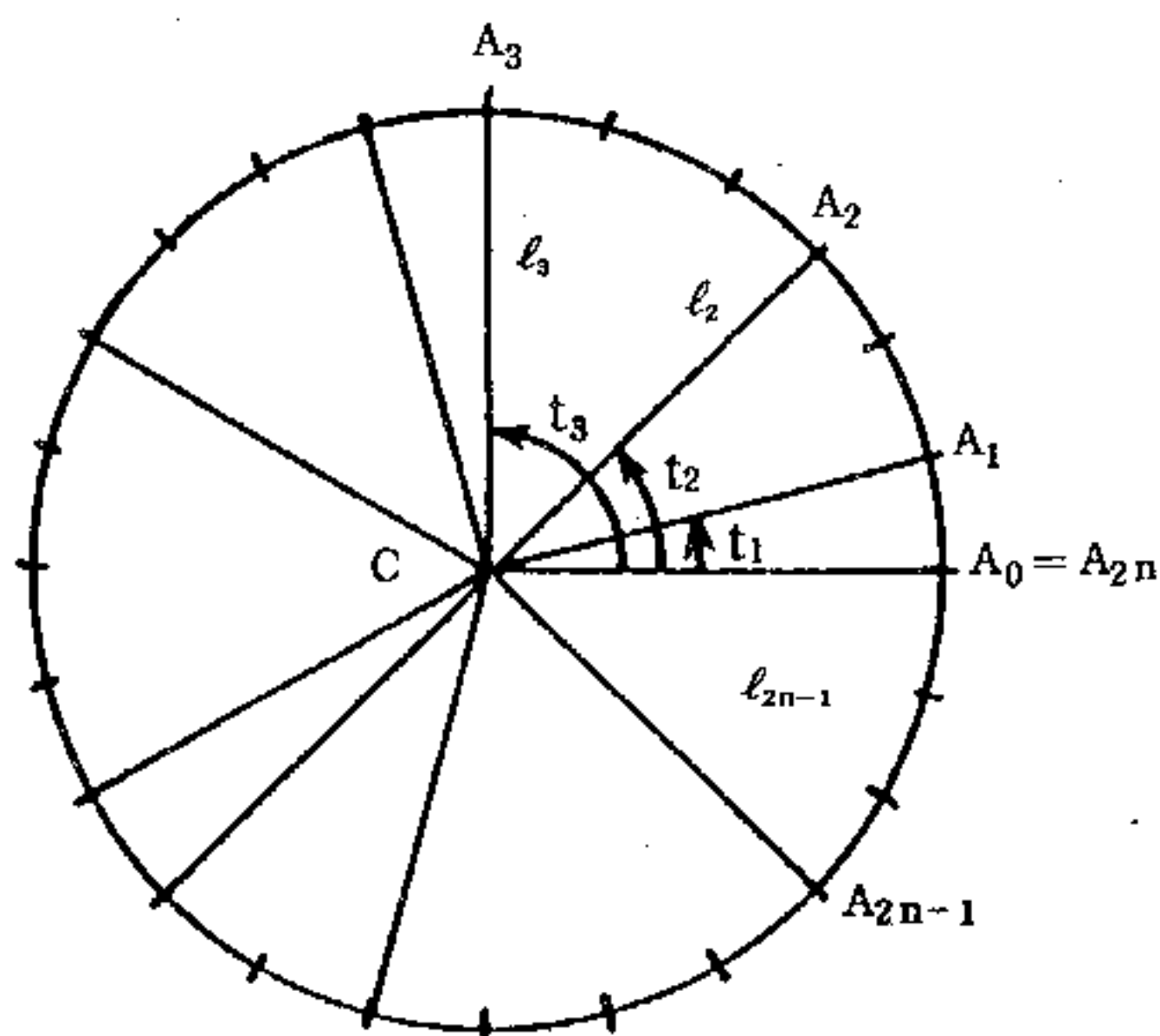


図4.2

交代おれ線は, 切り込みを入れた円板を谷, 山, 谷, 山, ...と交互に折りたたんだものを真横から見たものであるから, おれ線の頂点はもとの折り紙の折り線に対応している. また, 平坦条件と $x(0) = x(2\pi)$ は同値である.

定義4.2 (交代おれ線の正規化) 円板の平坦折り紙の交代おれ線に対し, 座標が最小となる点を A_0 として, 折り線の添え字をつけ直す. 新しい添え字で決まる半径 CA_0 に切り込みを入れて交代折り線を

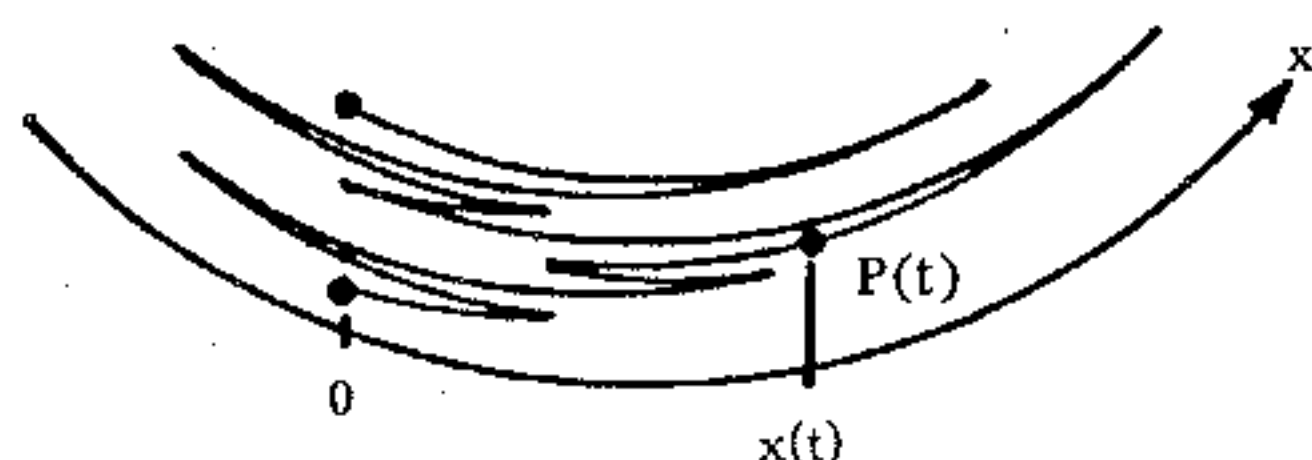
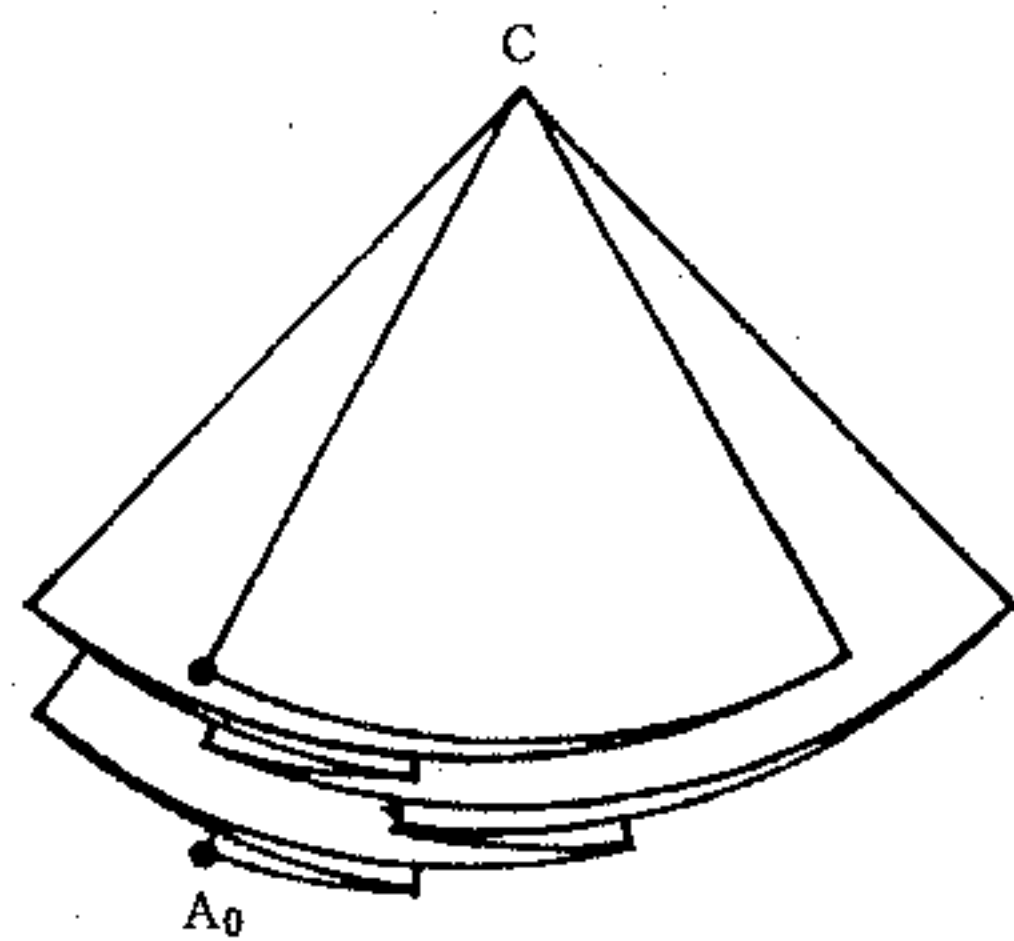
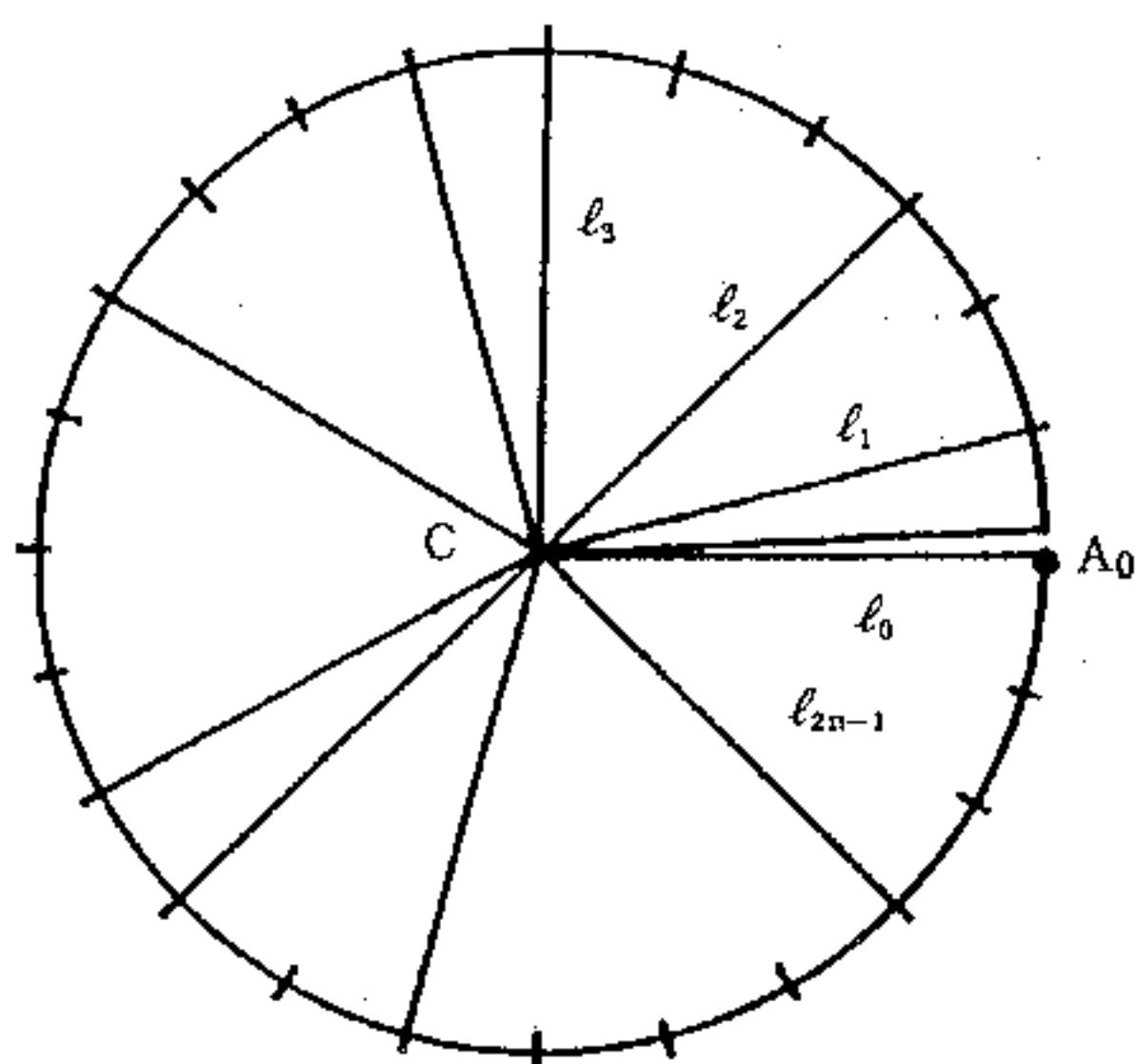


図4.3

作り直す事を交代おれ線の正規化と呼ぶ(図4.4).

正規化された交代おれ線では, $x(0) = x(2\pi) = 0$ かつ $x(t) \geq 0$ が成り立つ.

定理4.3 (円板の平坦折り紙の実現の存在定理)
 任意の円板の平坦折り紙には実現写像が存在する.
 すなわち, 円板の平坦折り紙は折り線にうまく山谷をつけて実際に平坦に折りたむことができる.

証明 正規化された交代おれ線の両端 A_0 と A_{2n} の座標は共に 0 であり, おれ線上の点はその右側(座標が 0 以上)にあるから, A_0 と A_{2n} をつないで閉じたおれ線を作ることができる. この操作は, 切り込みが入った円板を ℓ_0 で貼り合わせることに相当する(図4.5). こうして平坦な折りたたみを得る. これは, $\iota^{-1}(1) = \{\ell_0, \ell_1, \ell_3, \ell_5, \dots, \ell_{2n-3}, \ell_{2n-1}\}$, $\iota^{-1}(-1) = \{\ell_2, \ell_4, \ell_6, \dots, \ell_{2n-4}, \ell_{2n-2}\}$ で定義される写像 ι が実現となることを意味する. ただし, 折り線の添え字は正規化された交代おれ線

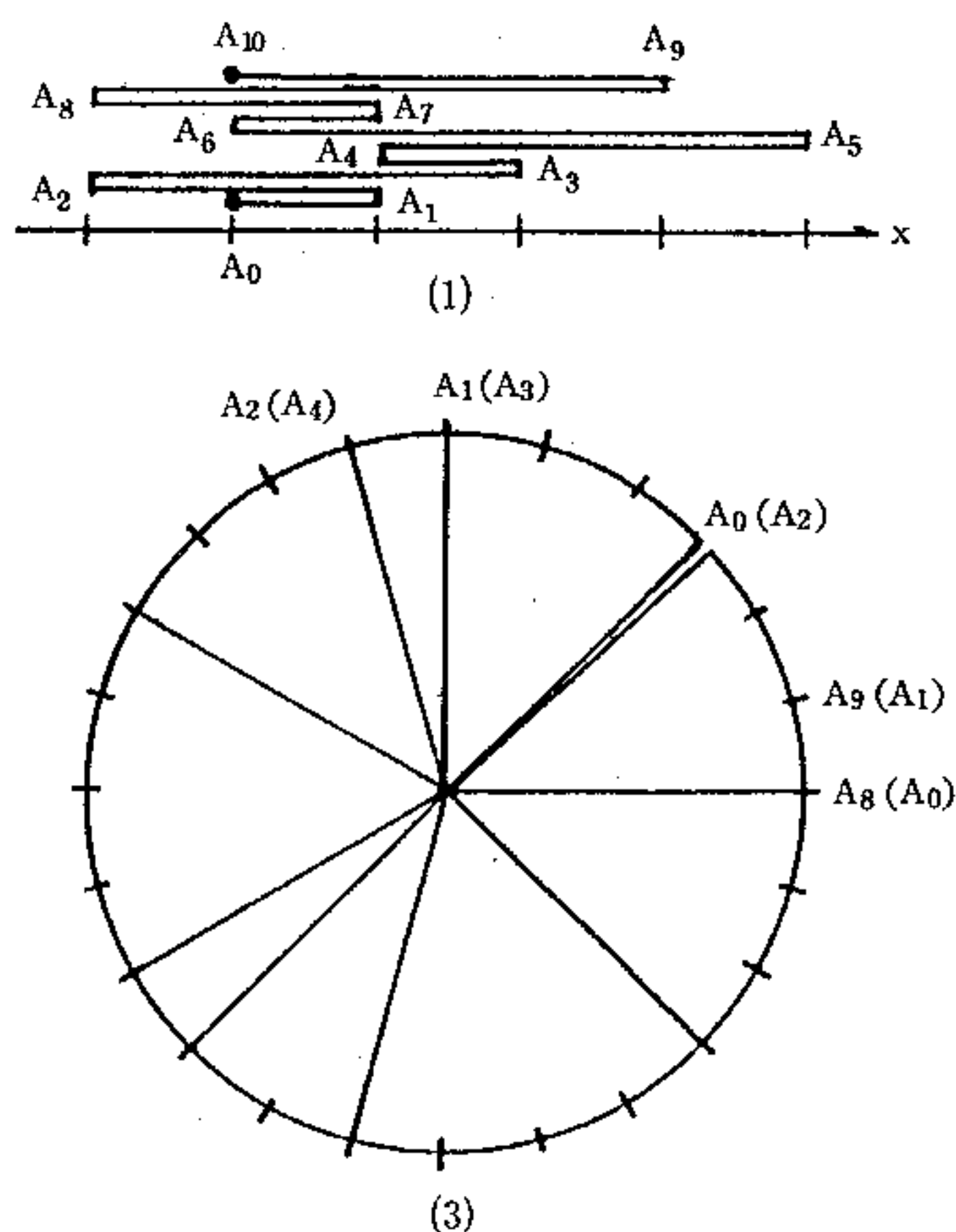


図4.4

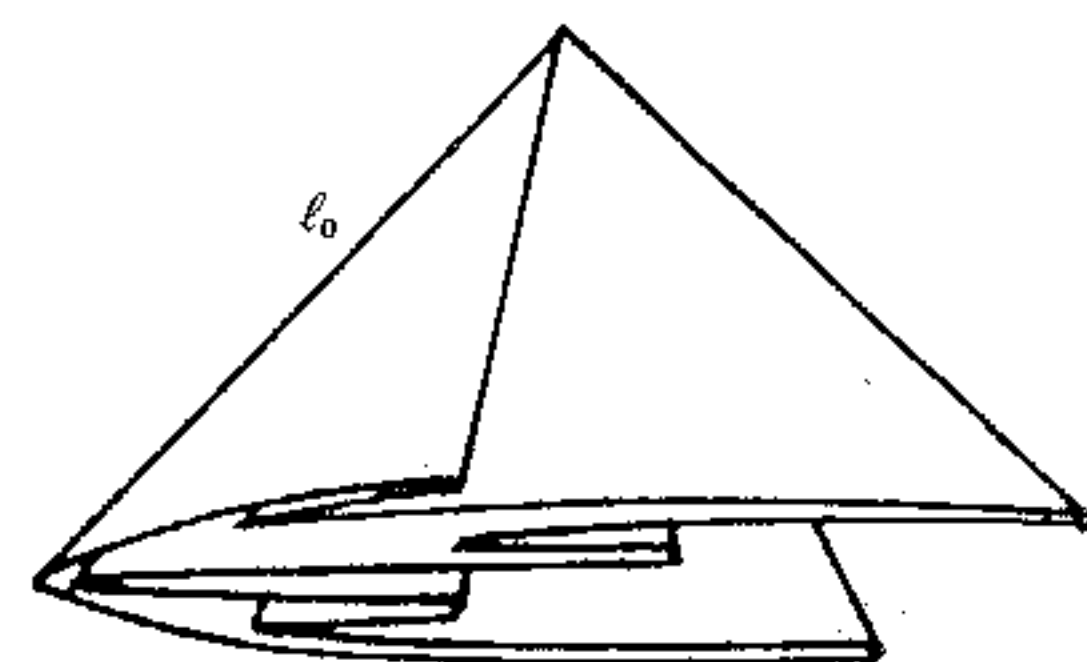
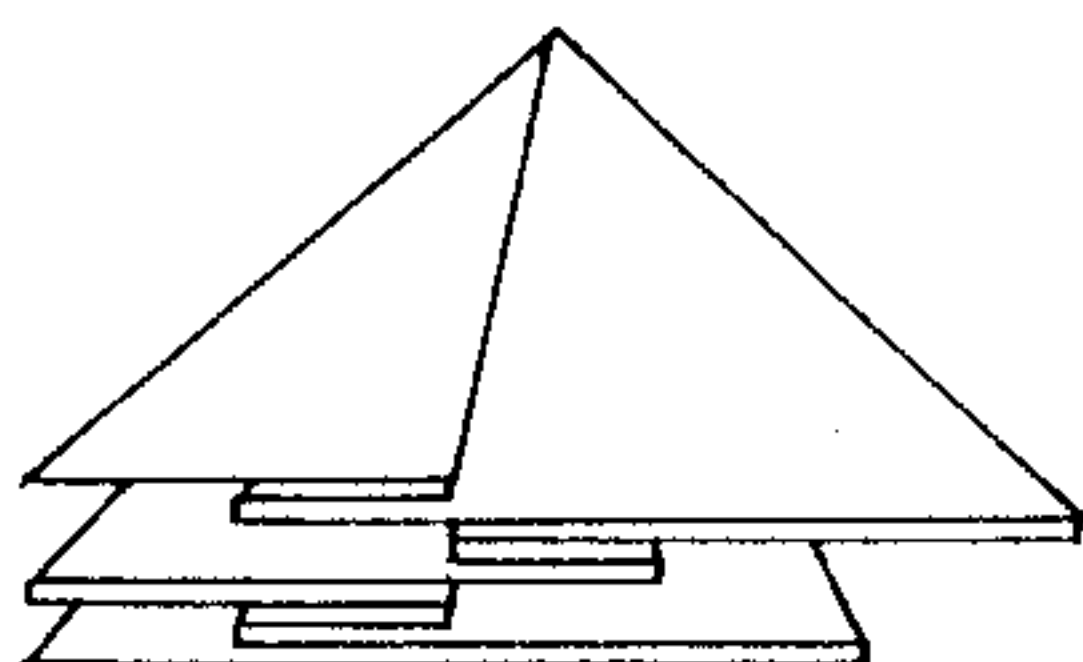
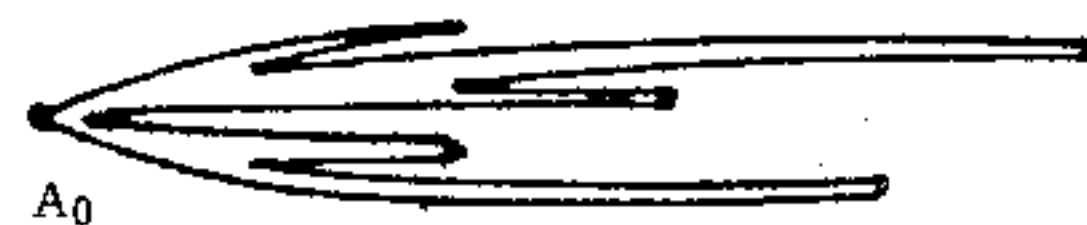
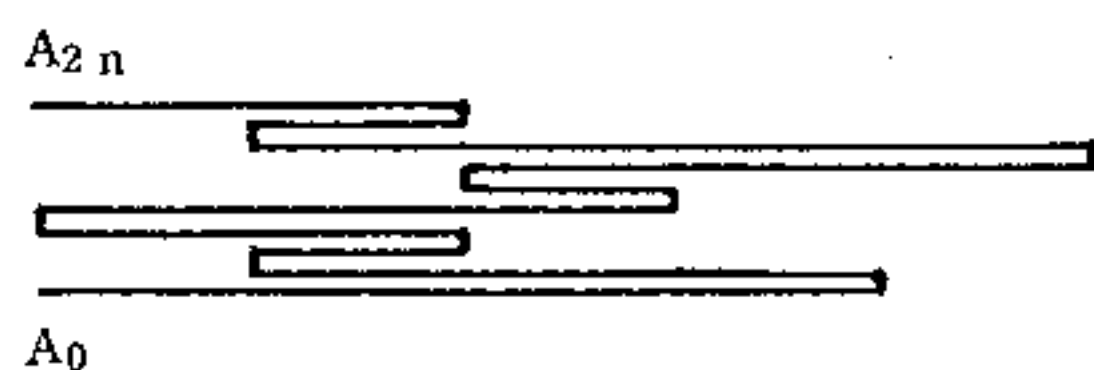


図4.5

のものである。

例 4.4 (図 4.6) 図 4.4(1)のおれ線では、左端に頂点が 2 つある (Q と R)。図 4.4(4)では、 $Q = A_0$ として正規化したか、 $R = A_0$ として正規化すると別の折りたたみを得る。

5. ひだの折り直し

どんな円板の平坦折り紙にも実現が存在することが分かった。また例 2.2 で示したように、実現はひ

とつとは限らない。例えば、図 5.1(1)のような実現から、ひだを一旦伸ばしてたたみ直すことにより別の実現が得られる。本節では、このようなひだの折り直しを考察する。

例 5.1 図 5.2(1)のようなひだは、(2)–(4)のようにたたみ方を変えることができる。(2)では、太線で示したひだが図 5.1 のように折り直されている。この操作は・印の 2 つの折り線の山谷を逆にする事と同じである。

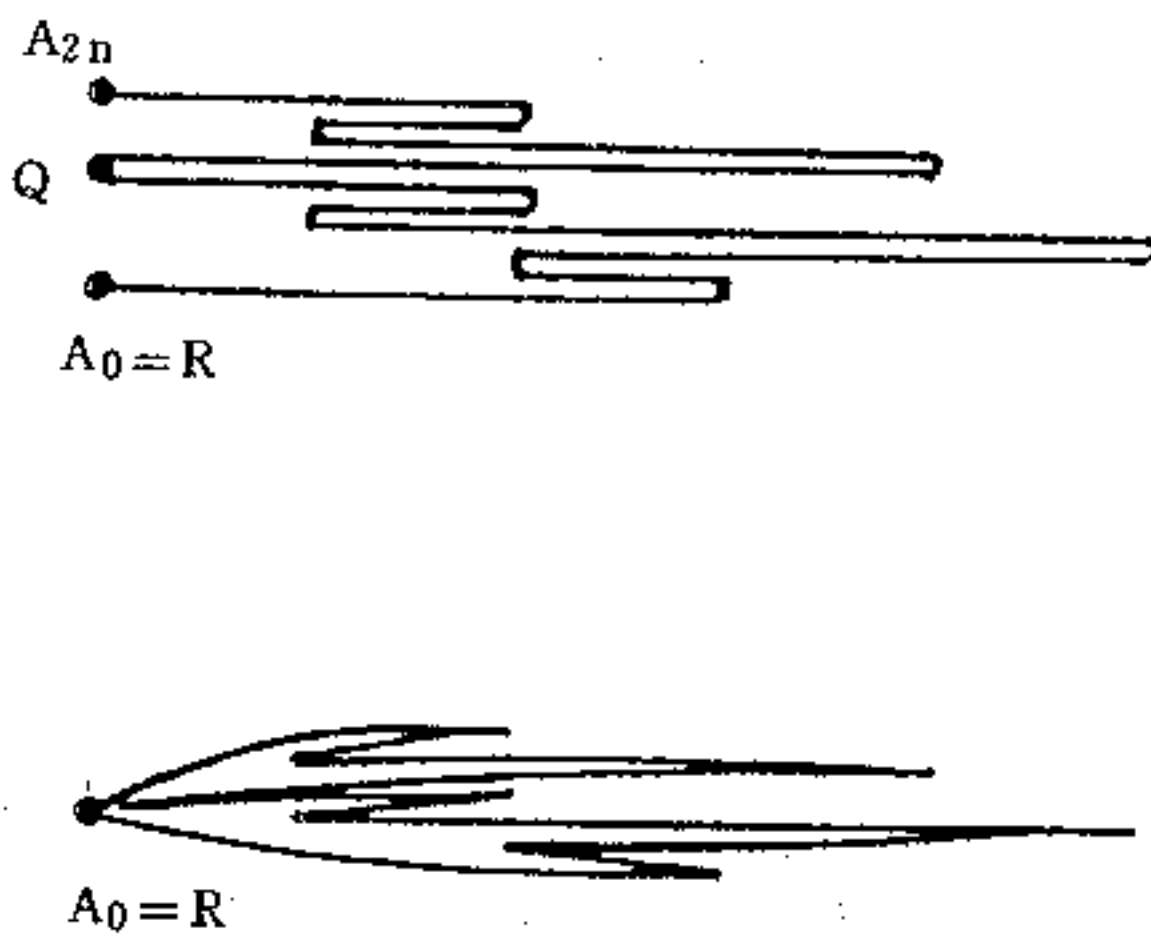


図 4.6

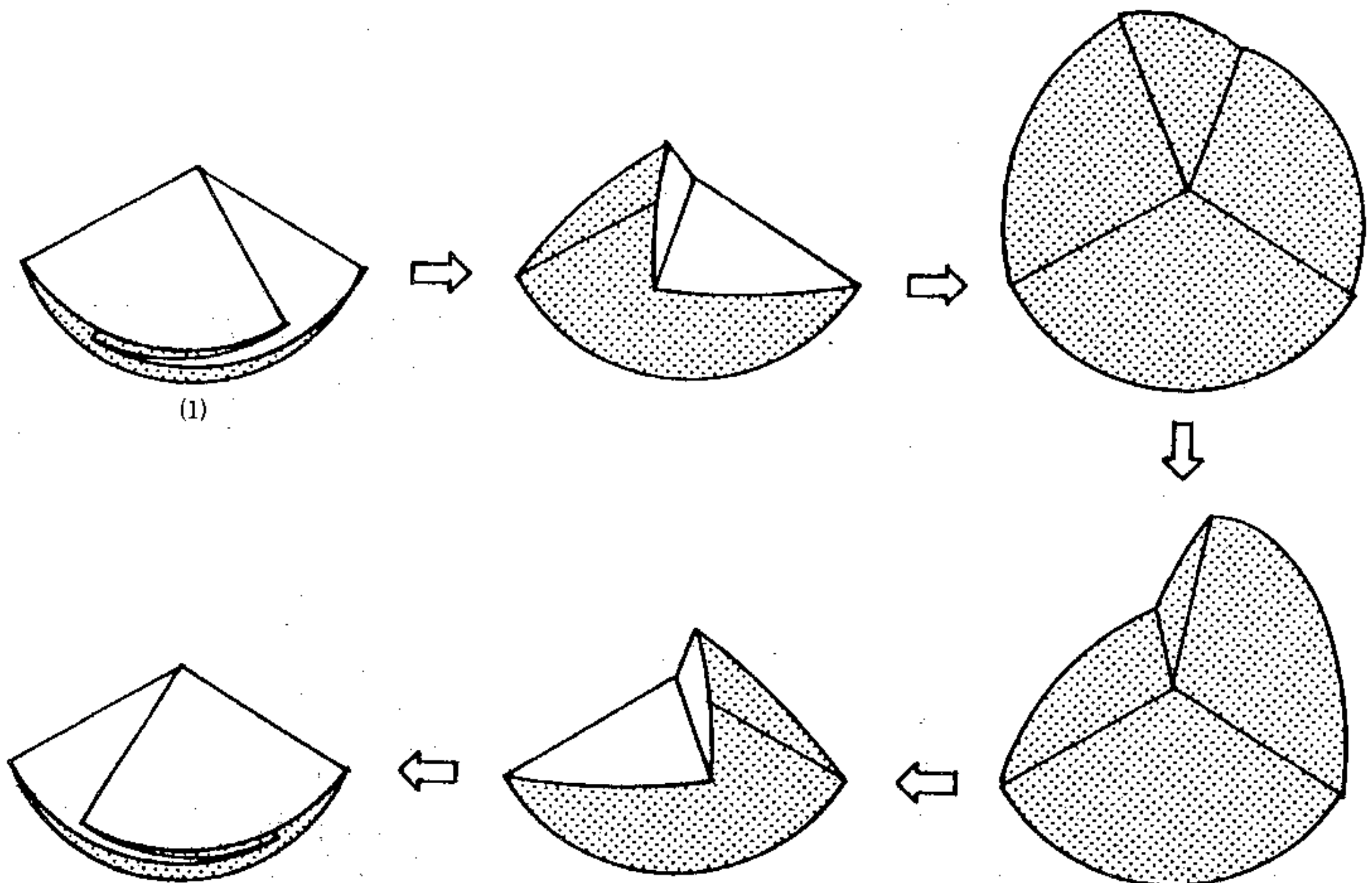
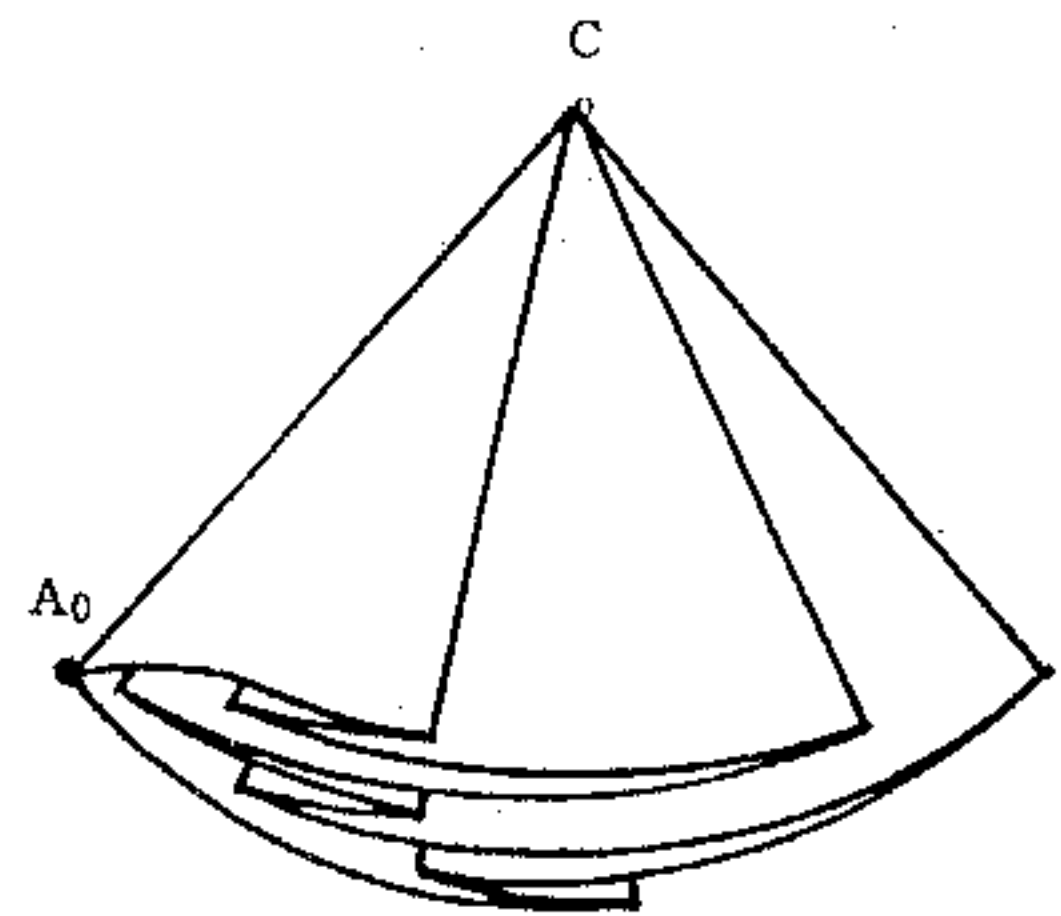


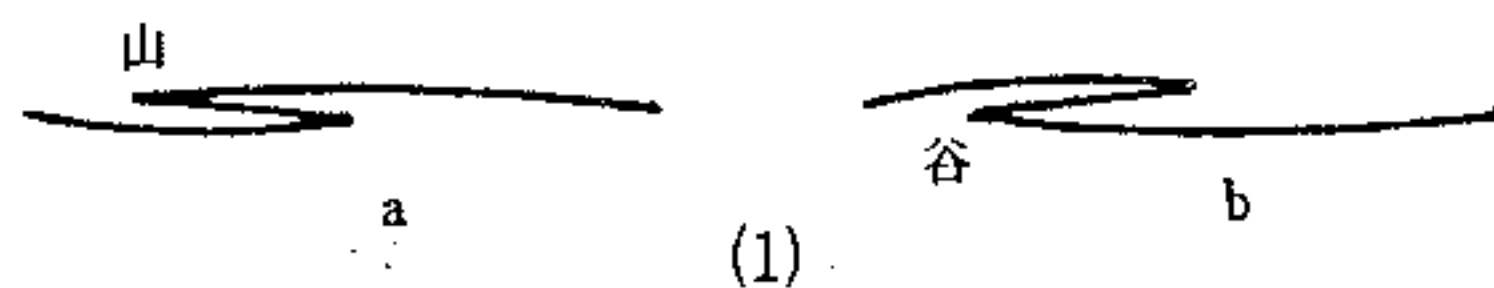
図 5.1

例5.2 図5.3(1)の平坦折り紙は例5.1とは違う。ひだ $d_1=A_3 \rightarrow A_6$ を折り直そうとすると、(2)のように紙がぶつかる。同様に(3)のひだ $d_2=A_1 \rightarrow A_4$ も折り直すことができない。ところが、(4)のように d_1 と d_2 を同時に折り直すことはできる。

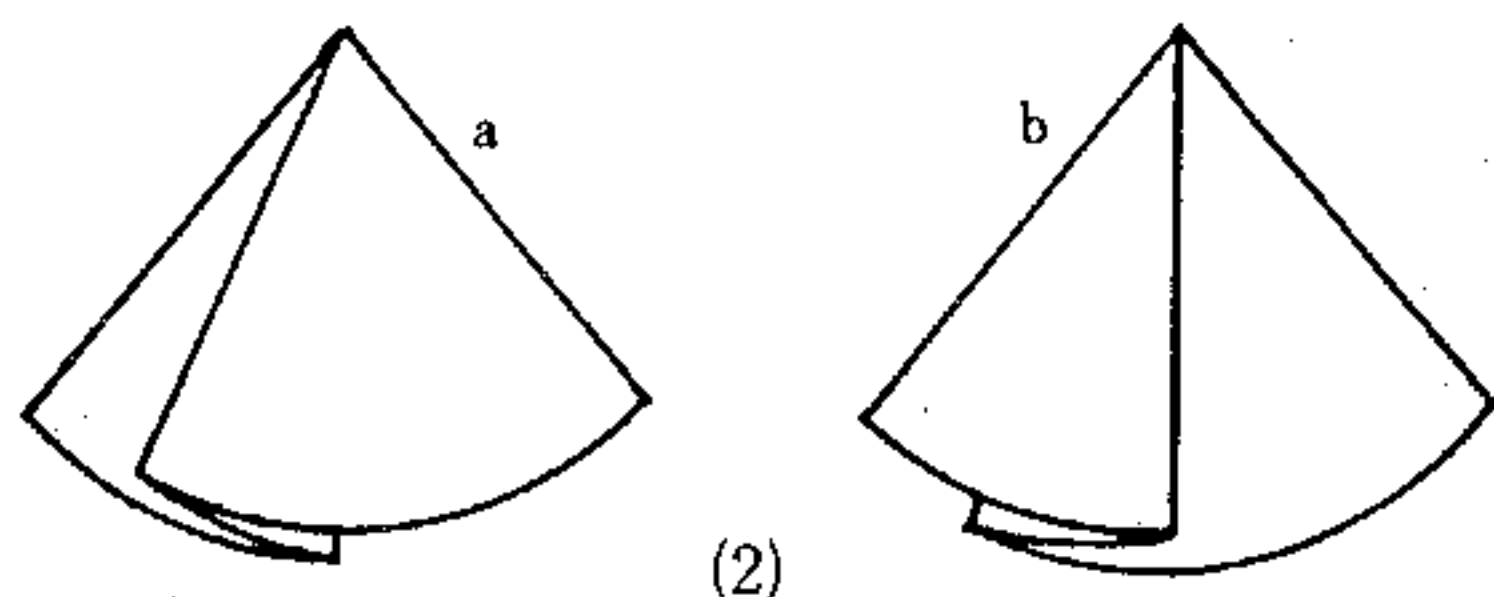
2つの例の違いは何が原因であろうか。ひだの折り直しをきちんと考えよう。

ひだの折り直しは図5.4(1)のようにおれ線で表せるが、もとの折り紙は図5.4(2)のようなものである。これは図3.2と同じものである。つまり、ひだ

の折り直しと2本の折り線の山谷を同時に逆にするのが同じなのは、補題3.2による。従って、補題3.2の仮定を満たさないひだでは少し事情が違って来る。例えば、図5.5(1)のひだでは、2本の折り

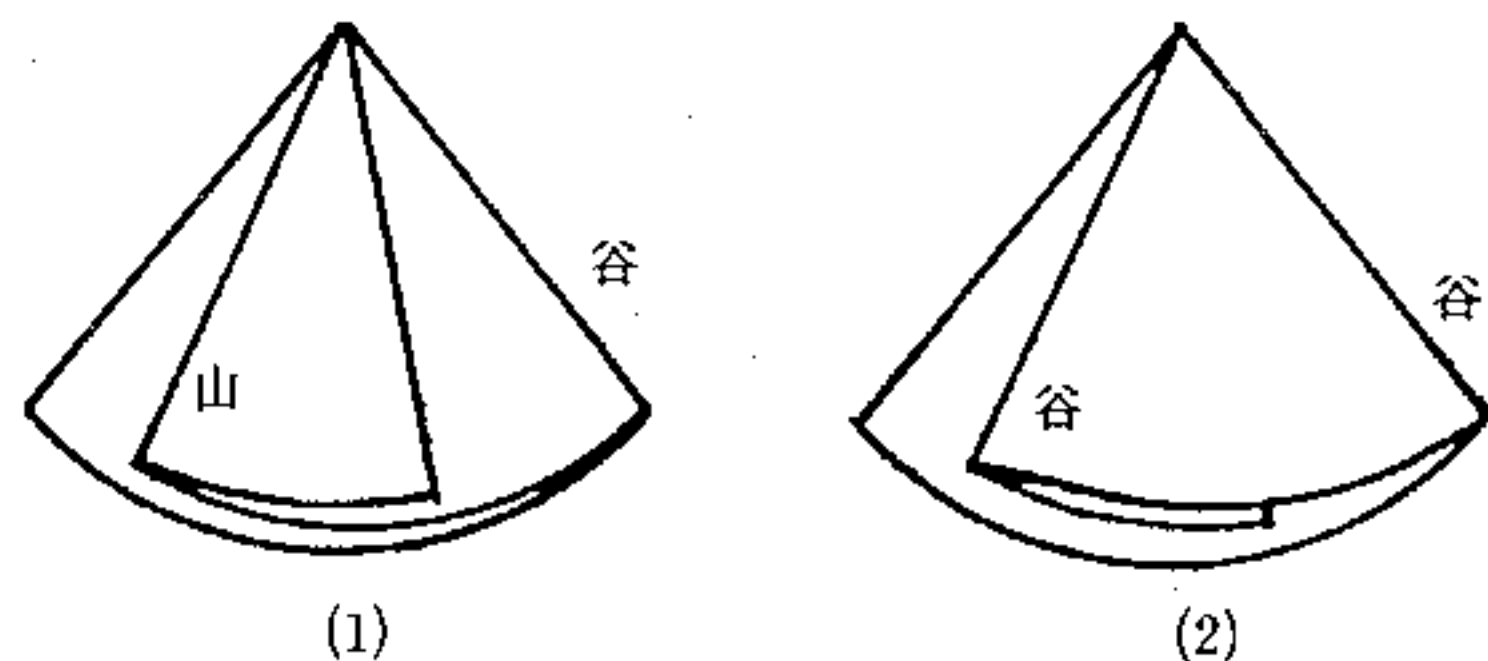


(1)



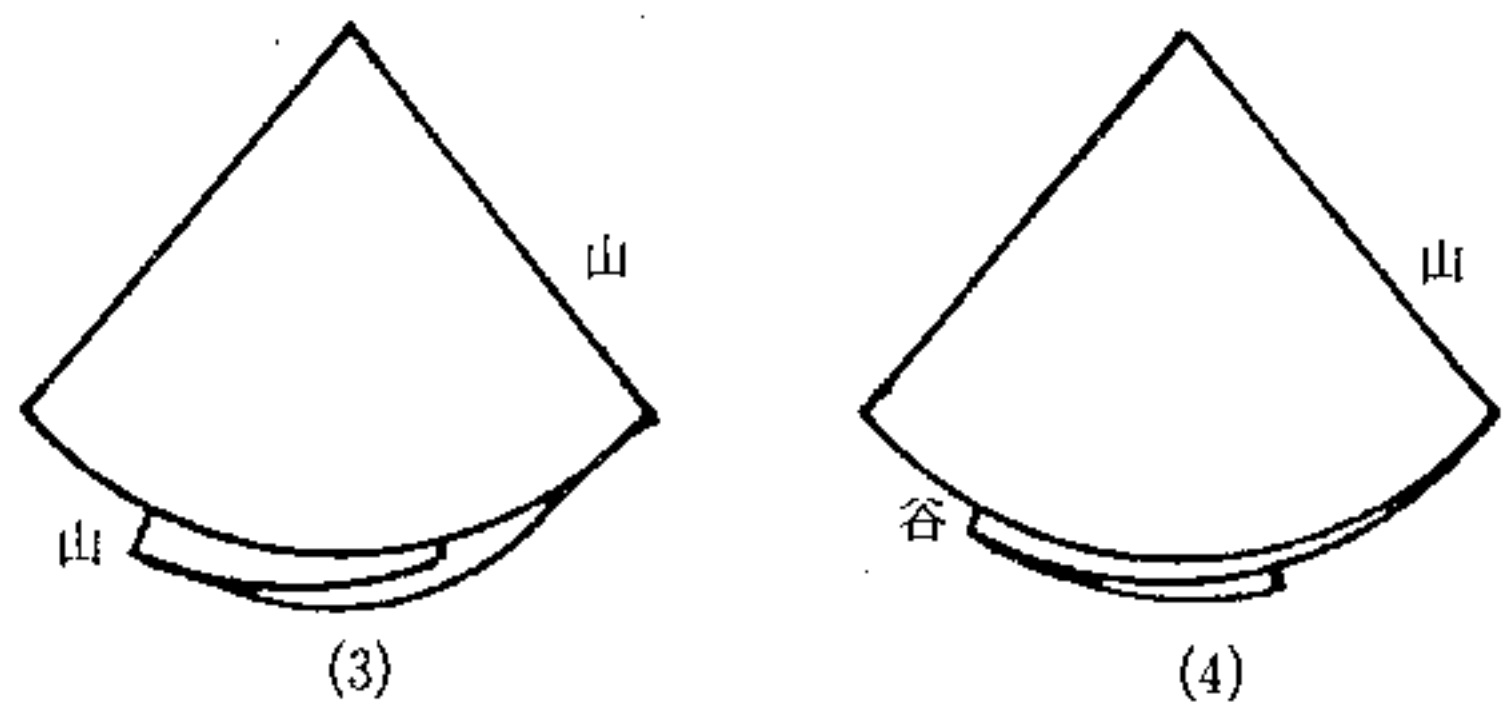
(2)

図5.4



(1)

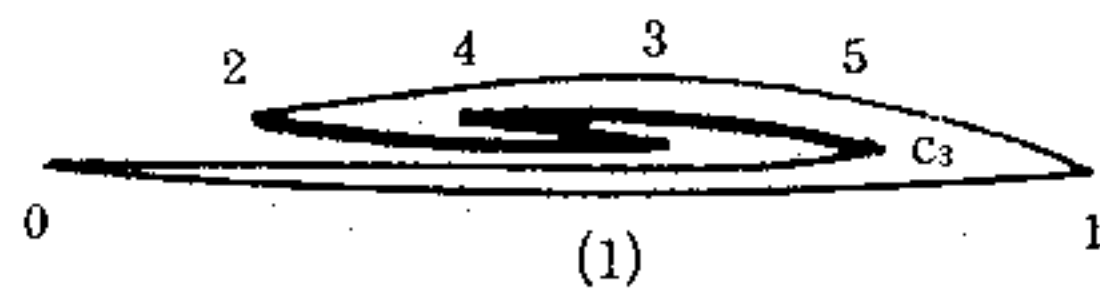
(2)



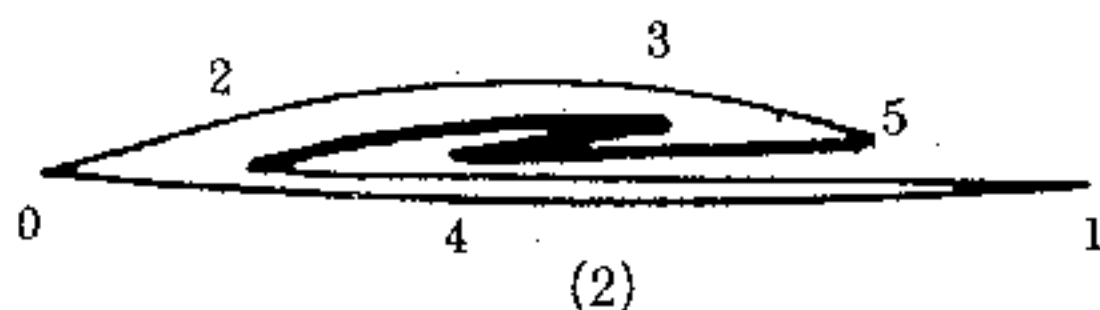
(3)

(4)

図5.5



(1)



(2)

図5.6

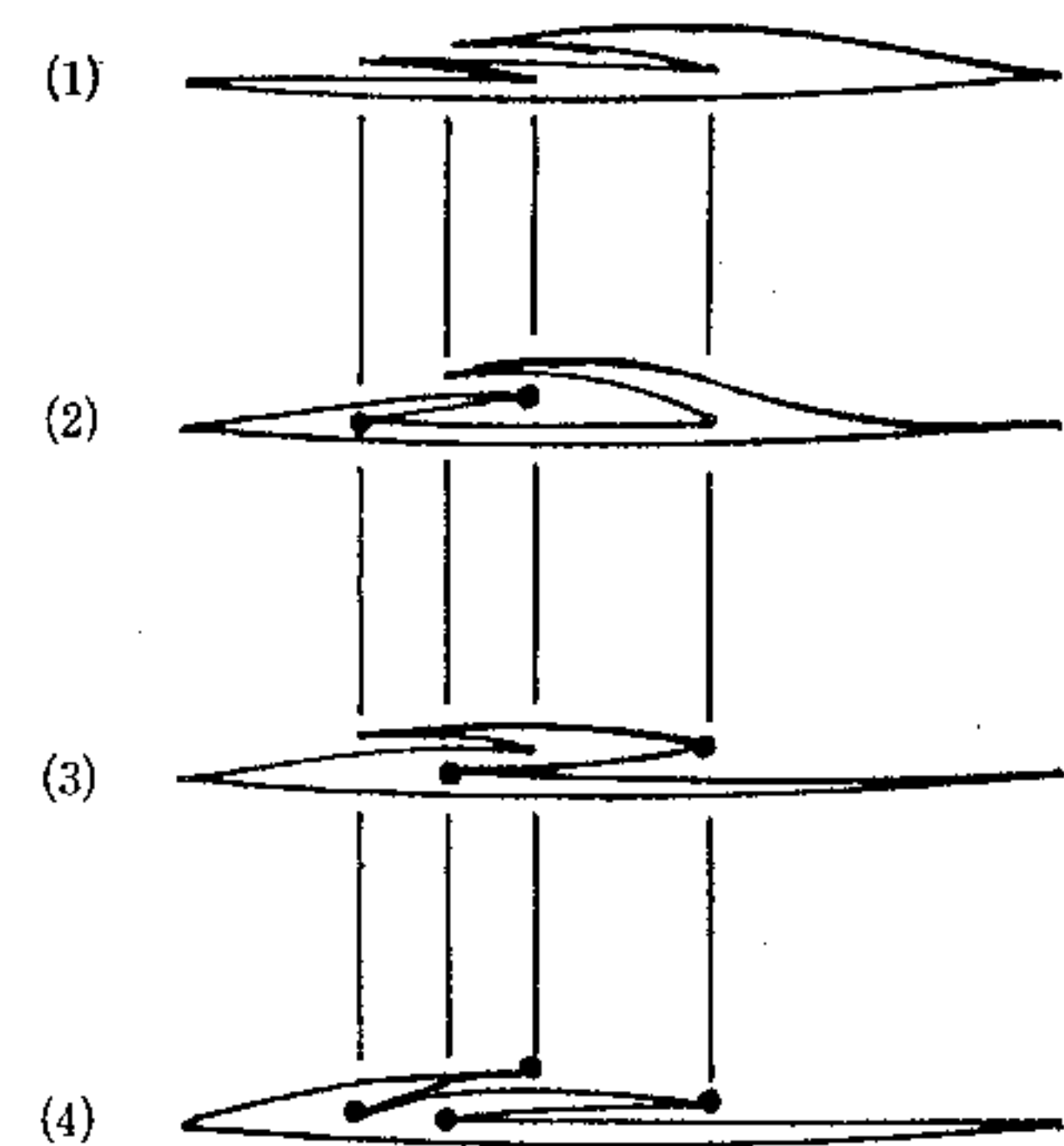


図5.2

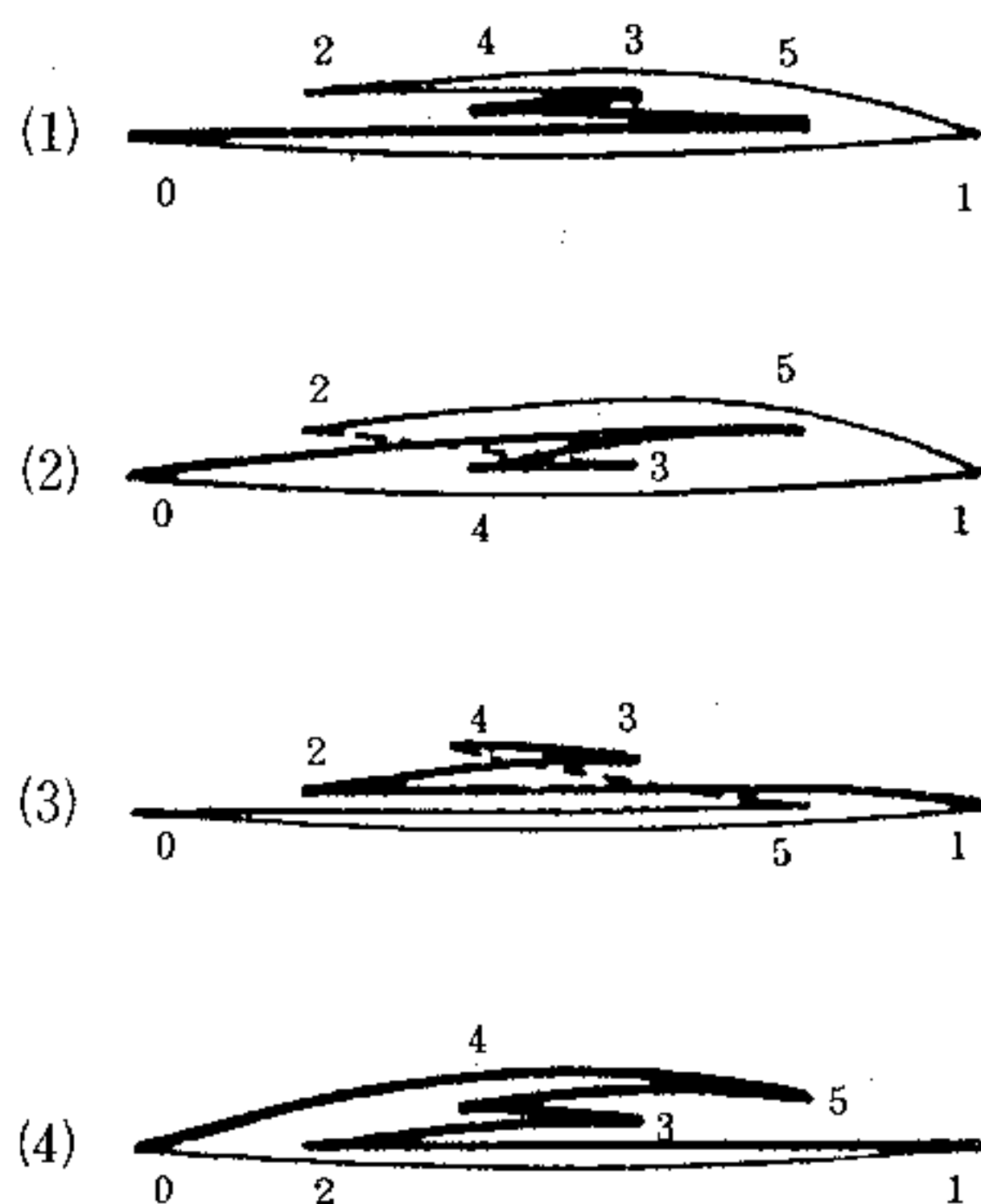


図5.3

線の山谷は(2)―(4)のように自由にできる。一方が山、他方が谷である必要はない。このように考えると、例5.2に(1)と(4)以外の折りたたみがあることに気づく。図5.6(1)のひだ $c_3 = A_2 \rightarrow A_5$ の折り直しが可能である。さらに図5.3(4)と組み合わせると、図5.6(2)のような折り直しもできる。

6. ひだの折り直しの定式化

例5.1や例5.2のひだの折り直しは補題3.2で説明できた。しかし複雑なひだではそうもいかない。例えば、図6.1(1)のひだの折り線の山谷は図5.5のように自由に選べる。しかし、このひだが図6.1(2)のようなひだの一部になっている場合には、 ℓ_1, ℓ_2 の山谷を同じにすると、(3)のようにぶつかって平坦にたたむことができない。

このようにひだの折り直しを考えると、折り直

そうとする部分が全体の中でどのような位置にあるかを把握しておく必要がある。そこでひだの折り直しを次のように定式化する。

定義6.1 (リバーシブルひだ(区間)) 正規化された交代おれ線と2実数 $0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$ が条件:

(i) $P(\alpha)$ と $P(\beta)$ は隣接しないおれ線の頂点,

(ii) $\alpha \leq t \leq \beta$ なる任意の t に対して,

$$(x(t) - x(\alpha))(x(t) - x(\beta)) \leq 0$$

を満たすとき、閉区間 $[\alpha, \beta]$ をリバーシブル区間、この区間に対応するひだ $P(\alpha) \rightarrow P(\beta)$ をリバーシブルひだと言う。さらに、

(iii) $\alpha < t < \beta$ なる任意の t に対して,

$$(x(t) - x(\alpha))(x(t) - x(\beta)) < 0$$

を満たすとき自由なりバーシブルひだ(区間)と言う。

この定義は先の3つの例において、折り直せるひだをきちんと定義したものである。条件(ii)は、点 $P(\alpha)$ と $P(\beta)$ がリバーシブルひだ(区間)の一番右と一番左にあることを意味する。条件(iii)は、ひだの途中にある点は座標が本当に $x(\alpha)$ と $x(\beta)$ の間

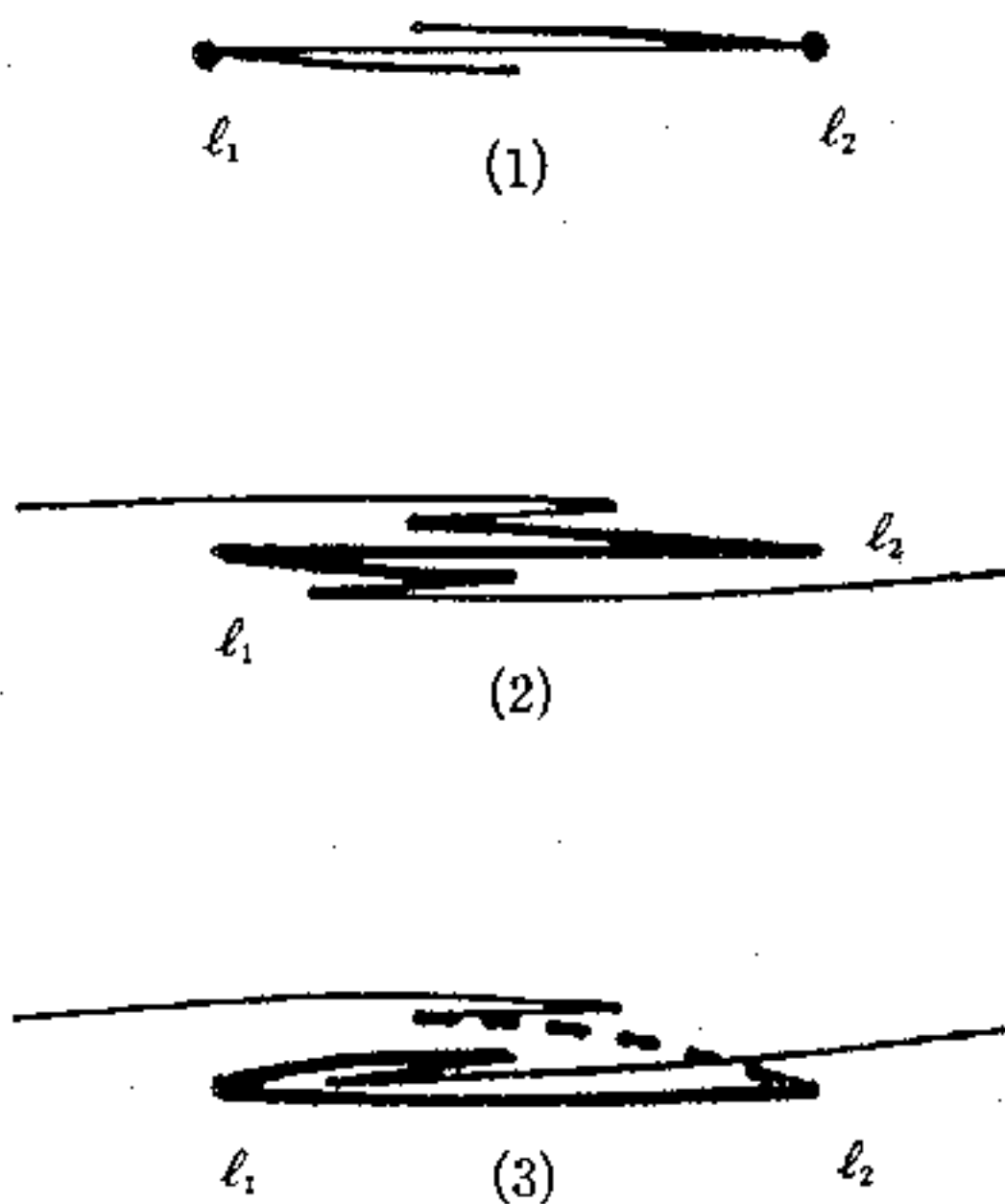


図6.1

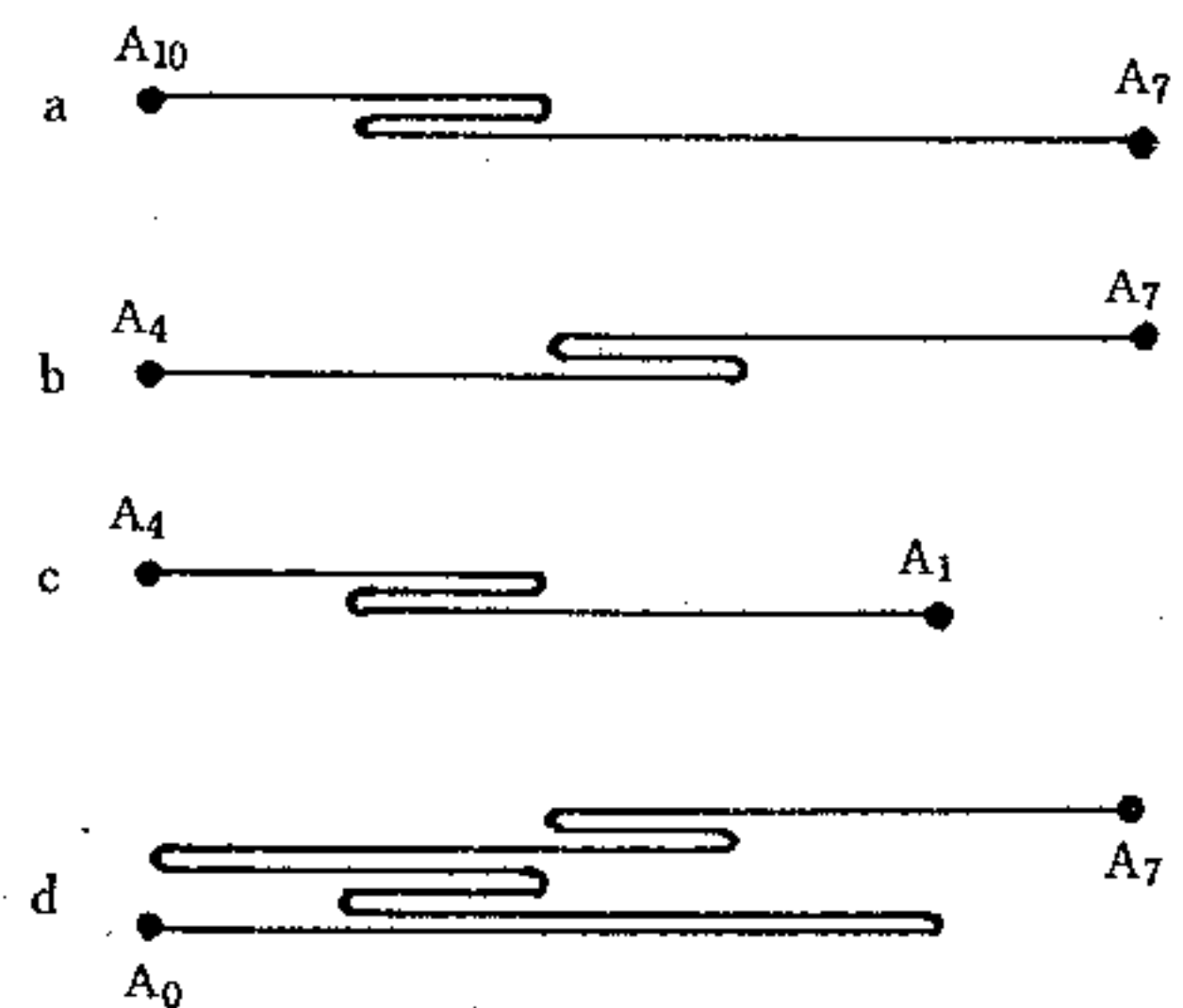
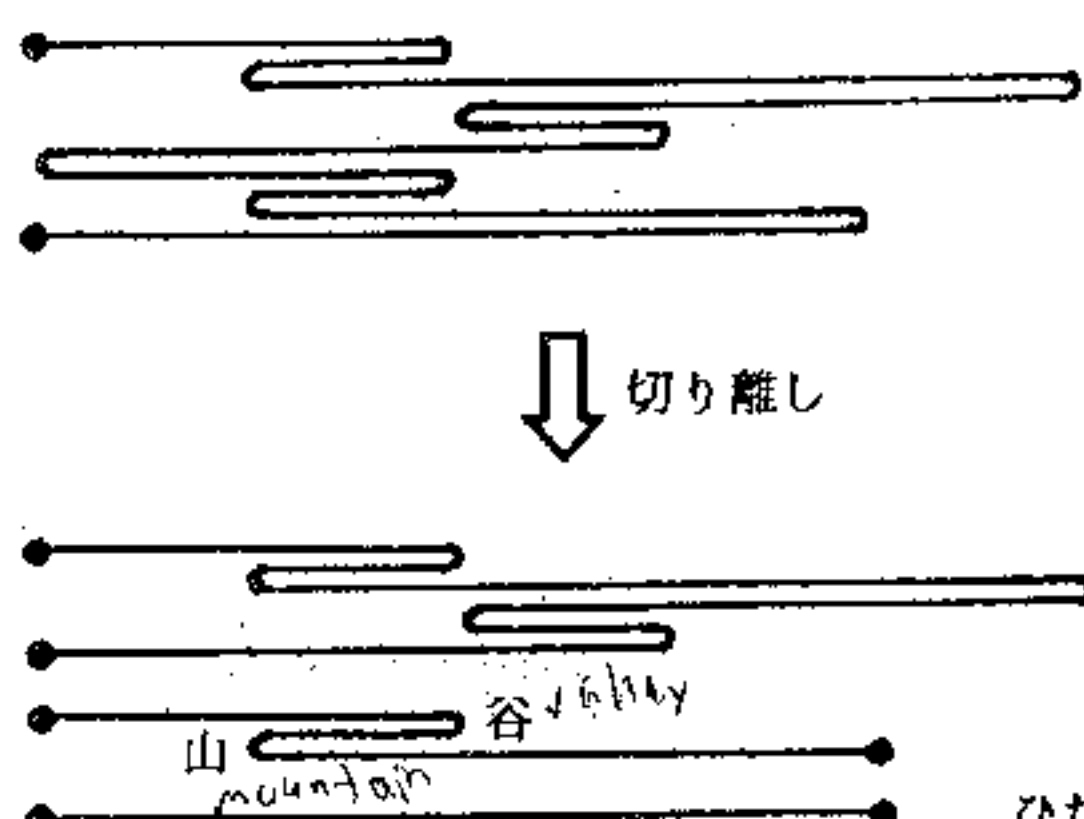
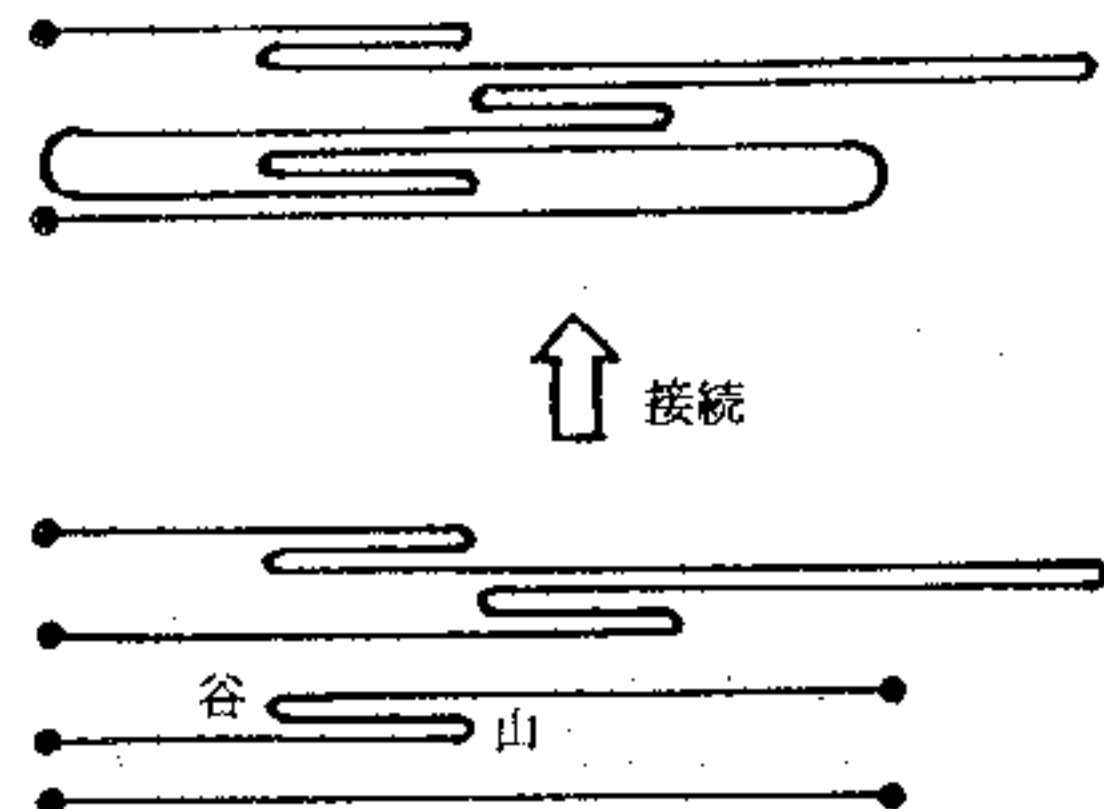


図6.2



ひだの折り直し

図6.3



にあることを意味する。なお、隣合う2点を結ぶおれ線は(ii)や(iii)を満たすが、ひだではないので(i)で除いている。

例6.2 図4.4(4)の正規化された交代おれ線のリバーシブルひだ(区間)は、図6.2のようになる。このうち、 a, b, c は自由なりバーシブルひだである。

Theorem

補題6.3 円板の平坦折り紙の1つの実現の自由なりバーシブルひだ $c = P(\alpha) \rightarrow P(\beta)$ に対して、ひだの途中にある頂点に対応する折り線の山谷を全て逆にしたものは実現になる。

Proof

証明 図6.3のように、自由なりバーシブルひだ c を一旦切り離して山谷を全て逆にし、再び元の位置に貼り合わせればよい。

補題6.3のような山谷の変更を r_c あるいは山谷を逆にする折り線の番号で $r_{\{2, 3, 4, 5\}}$ というように表すことにする。自由でないリバーシブルひだの場合には r_c の作用は少しややこしくなる。図6.4(2)のひだ c, d は自由でないリバーシブルひだである。(1)のような実現 l に対して r_{cl} は(3)のような実現になる。しかし、これに r_d を作用させた $r_d r_{cl}$ は実現ではない。このように自由でないリバーシブルひだに関する折り直しは、実現を実現に移すとは限ら

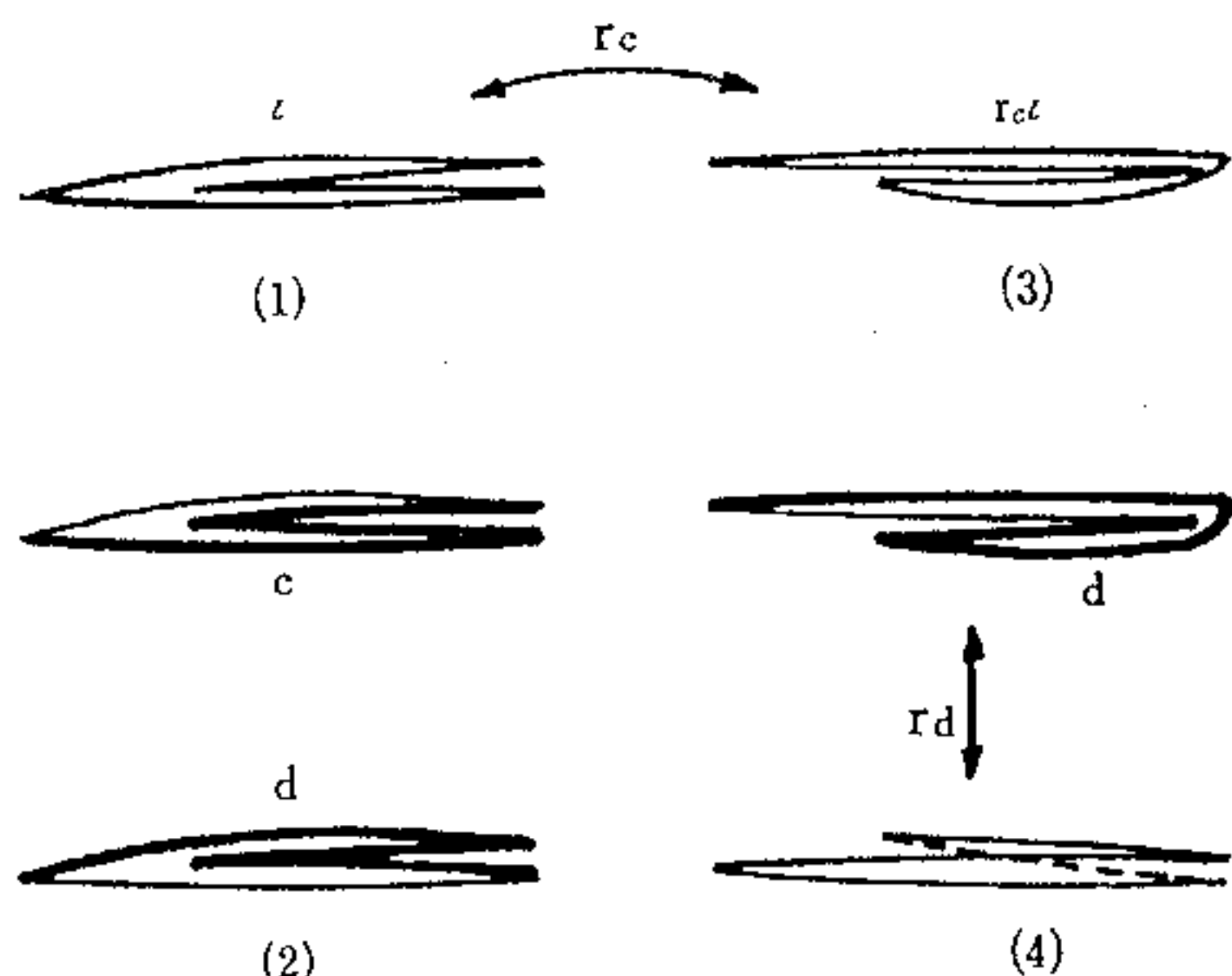


図6.4

ない。

補題6.4 (リバーシブルひだ(区間)の存在)

$2n \geq 4$ の場合、正規化された任意の交代おれ線に対して、リバーシブルひだ(区間)は存在する。

証明 $x(t)$ が最大となる t を t' とすると、点 $P = P(t')$ はおれ線の頂点であり、 $0 \leq t \leq t'$ なる任意の t に対して、 $0 = x(0) \leq x(t) \leq x(t')$ 。また $t' \leq t \leq 2\pi$ なる任意の t に対して、 $x(t') \geq x(t) \geq x(2\pi) = 0$ が成り立つ。 $2n \geq 4$ だから、 $A_0 = A_{2n}$ と $P(t')$ 以外におれ線の頂点が少なくとも2つあるので、2つの区間の一方には頂点がある。よって、リバーシブルひだ(区間)が存在する。

補題6.5 リバーシブルひだ(区間)にはおれ線の頂点が偶数個ある。

証明 $\alpha \leq t \leq \beta$ なる t に対して、 $x(\alpha) \leq x(t) \leq x(\beta)$ となる場合に証明する。このリバーシブルひだ(区間)の頂点を順に、 $A_1 = P(\alpha), A_{i+1} = P(t_{i+1}), \dots, A_j = P(\beta)$ とする。 $x(\alpha) \leq x(t)$ より、 $x(t)$ は区間 $\alpha = t_1 \leq t \leq t_{i+1}$ で単調増加である。同様にひとつおきに、 $t_1 \leq t \leq t_{i+1}, t_{i+3} \leq t \leq t_{i+4}, \dots$ でも単調増加である。一方、 $x(t) \leq x(\beta)$ より、 $t_{j-1} \leq t \leq t_j = \beta$ は、 $x(t)$ が単調増加になる区間である。従って、 j と $i+1$ の差は偶数である。すなわち $j - i + 1$ は偶数。そして区間 $\alpha \leq t \leq \beta$ には、 $j - i + 1$ 個の頂点 $A_1, A_{i+1}, \dots, A_j$ があるから偶数個になる。

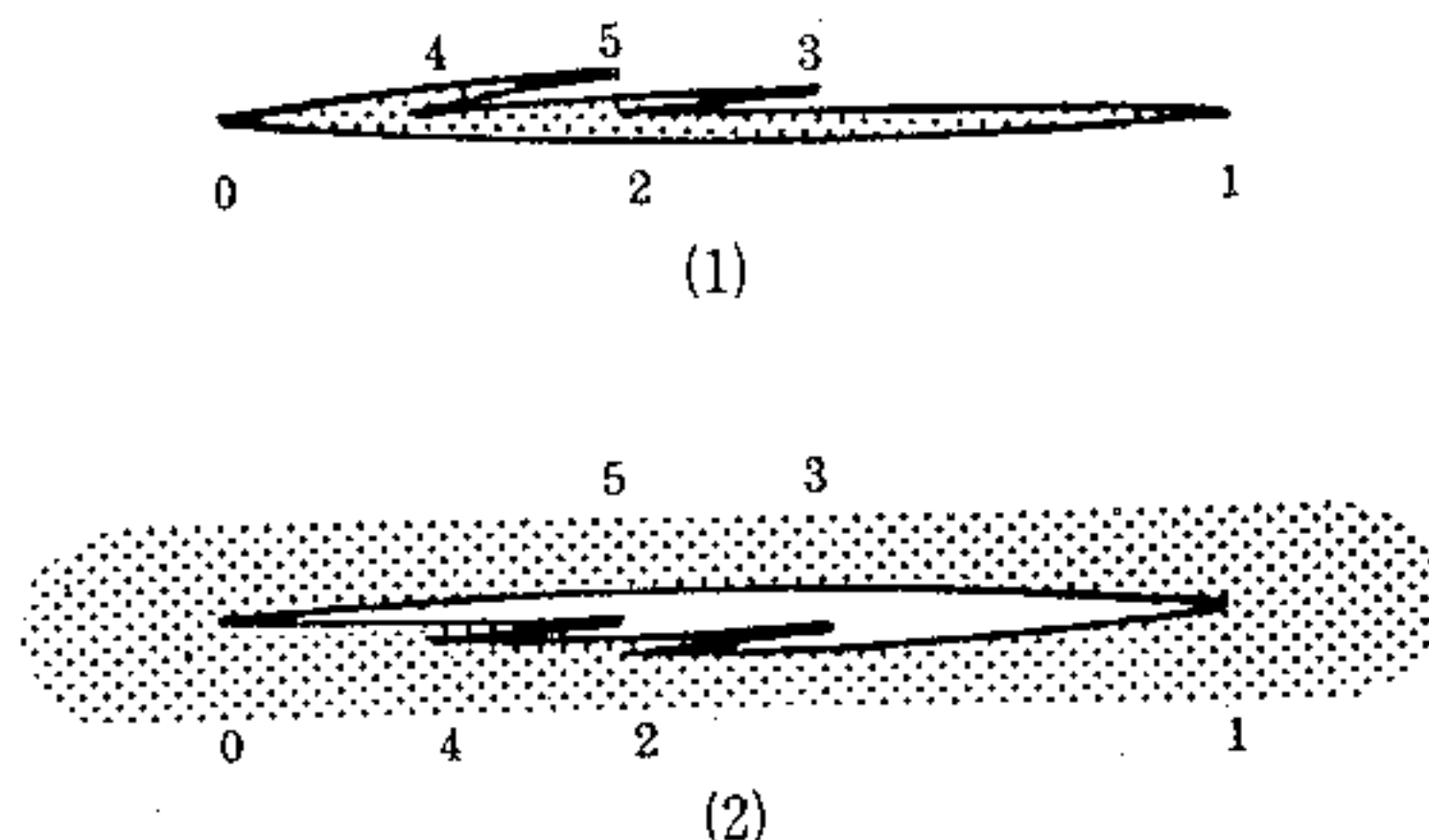


図7.1

7. 問題の整理

円板の平坦折り紙のひとつの実現に対して、ひだを折り直すことにより様々な実現が得られた。しかし円板の平坦折り紙の全ての実現はリバーシブルひだの折り直しだけで得られる訳ではない。例えば、図7.1(2)は(1)のリバーシブルひだを折り直したものではない。リバーシブルひだの折り直しを繰り返して行っても紙の表裏が入れ変わることはないからである。

それでは、このような実現ともとの実現はどのような関係にあるだろうか。この関係を表現するために、記号を整理する。

円板の任意の平坦折り紙 K に対して、 K の山谷写像全体の集合を C あるいは $C(K)$ 、実現全体の集合を R あるいは $R(K)$ で表す。また、定理4.3により得られる実現のひとつを ι_0 で表し、これを固定する。すると補題6.3は

補題7.1 (補題6.3の書き換え) 円板の平坦折り紙 K の任意の自由なリバーシブルひだ c に対して、 $r_c: C(K) \rightarrow C(K)$ は $R(K)$ から $R(K)$ への全単射である。

と書き換えることができる。そして、本節の始めに述べたことは次のように表せる。

補題7.2 円板の平坦折り紙 K とひとつの実現 ι に対して、 $\{r_{c_n} \cdots r_{c_2} r_{c_1} \iota \in R(K) ; \text{各 } c_i \text{ は } K \text{ のリバーシブルひだ}\} \neq R(K)$ となる。

$\iota = \iota_0$ としても上の命題は成立するので、次のような問題が考えられる。

問題7.3 円板の平坦折り紙 K とその実現 ι_0 に対して、 ι_0 にどのような操作を行えば K の実現が全て得られるか。その操作の基本となるものを見つけ、それらの関係つまり $R(K)$ の構造を調べよ。

8. ポケットの裏返し

問題7.3の答えの一部は図7.1の裏返しである。これは以下のようにまとめることができる。

定義8.1 (全リバーシブルひだ(区間)) 正規化された交代おれ線と2実数 $0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$ に対し、 $x(\alpha)$ と $x(\beta)$ が $x(t)$ の最大値と最小値であるとき、ひだ $P(\alpha) \rightarrow P(\beta)$ を全リバーシブルひだと言う。

注意：図8.1の線分 AB はひだではないが、定義の条件を満たしているので全リバーシブルひだと呼ぶ。また途中におれ線の頂点があれば、全リバーシブルひだはリバーシブルひだでもある。

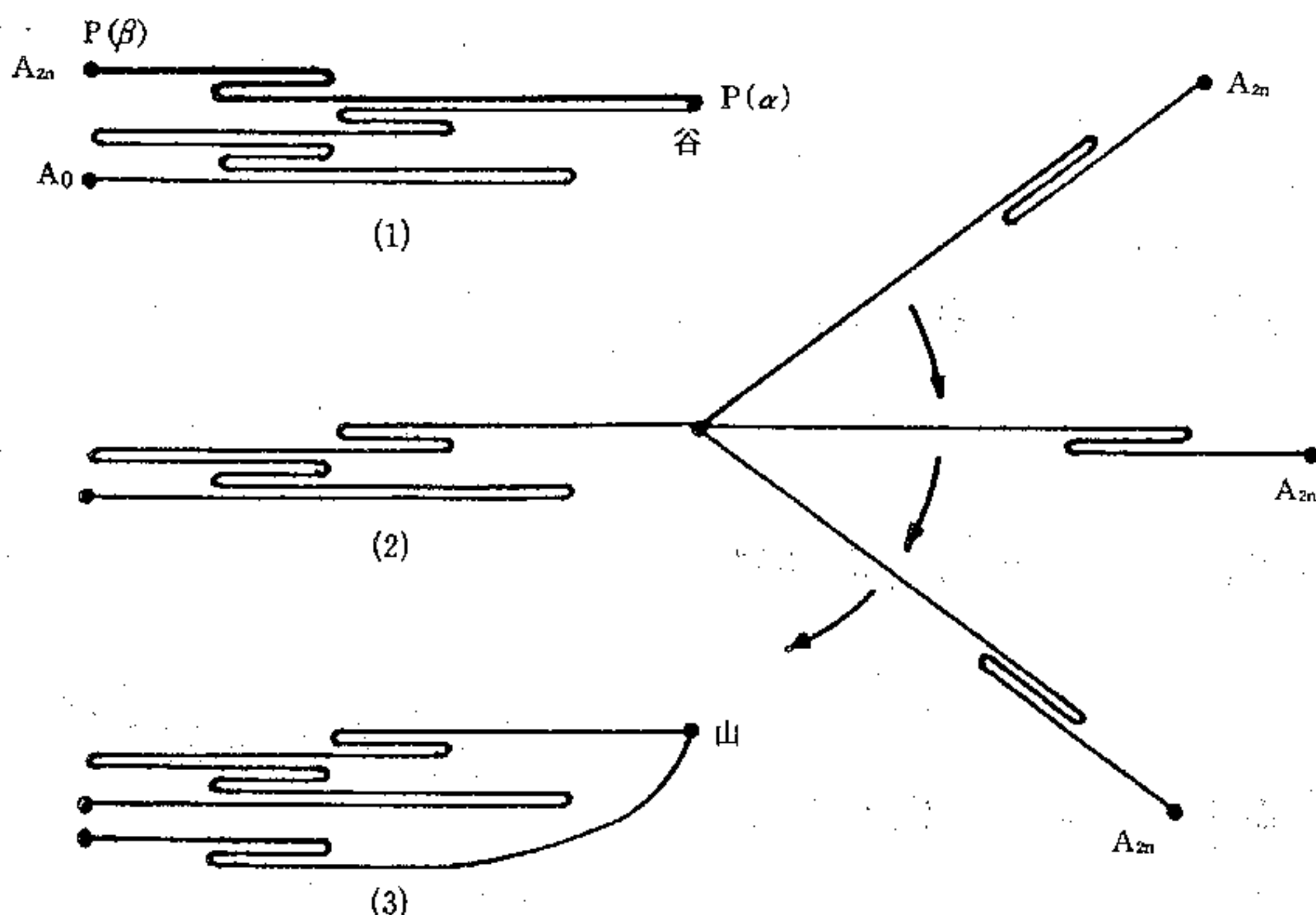


図8.2

補題 8.2 円板の平坦折り紙 K の 1 つの実現に対し、全リバーシブルひだ $c = P(\alpha) \rightarrow P(\beta)$ が、条件 (i), (ii) の一方を満たすならば、両端点 $P(\alpha)$, $P(\beta)$ に対応する折り線の山谷を逆にしたものは K の実現になる。

(i) ひだ c が外側に出せる (図 8.2(1)).

(ii) ひだ c が内側にあるが、この全リバーシブル区間によって分けられた 2 つ部分にそれぞれ全リバーシブル区間が存在する (図 8.3(1)).



図 8.1

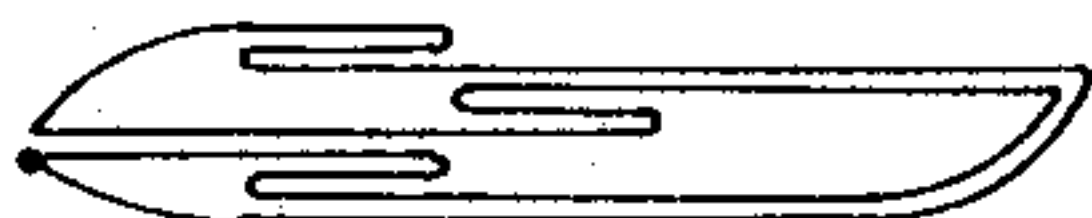
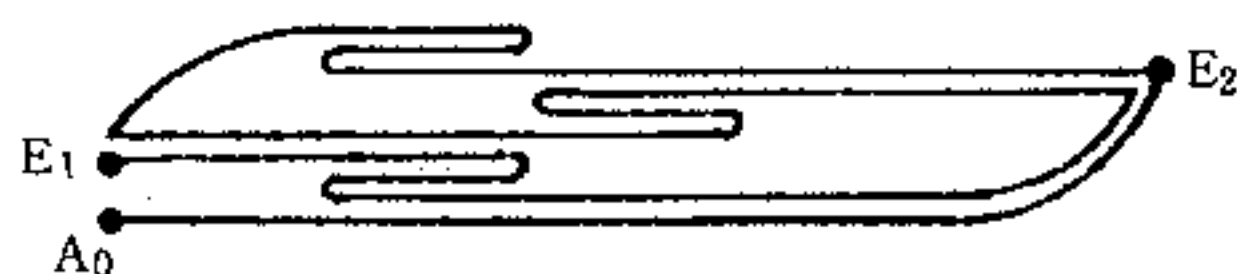
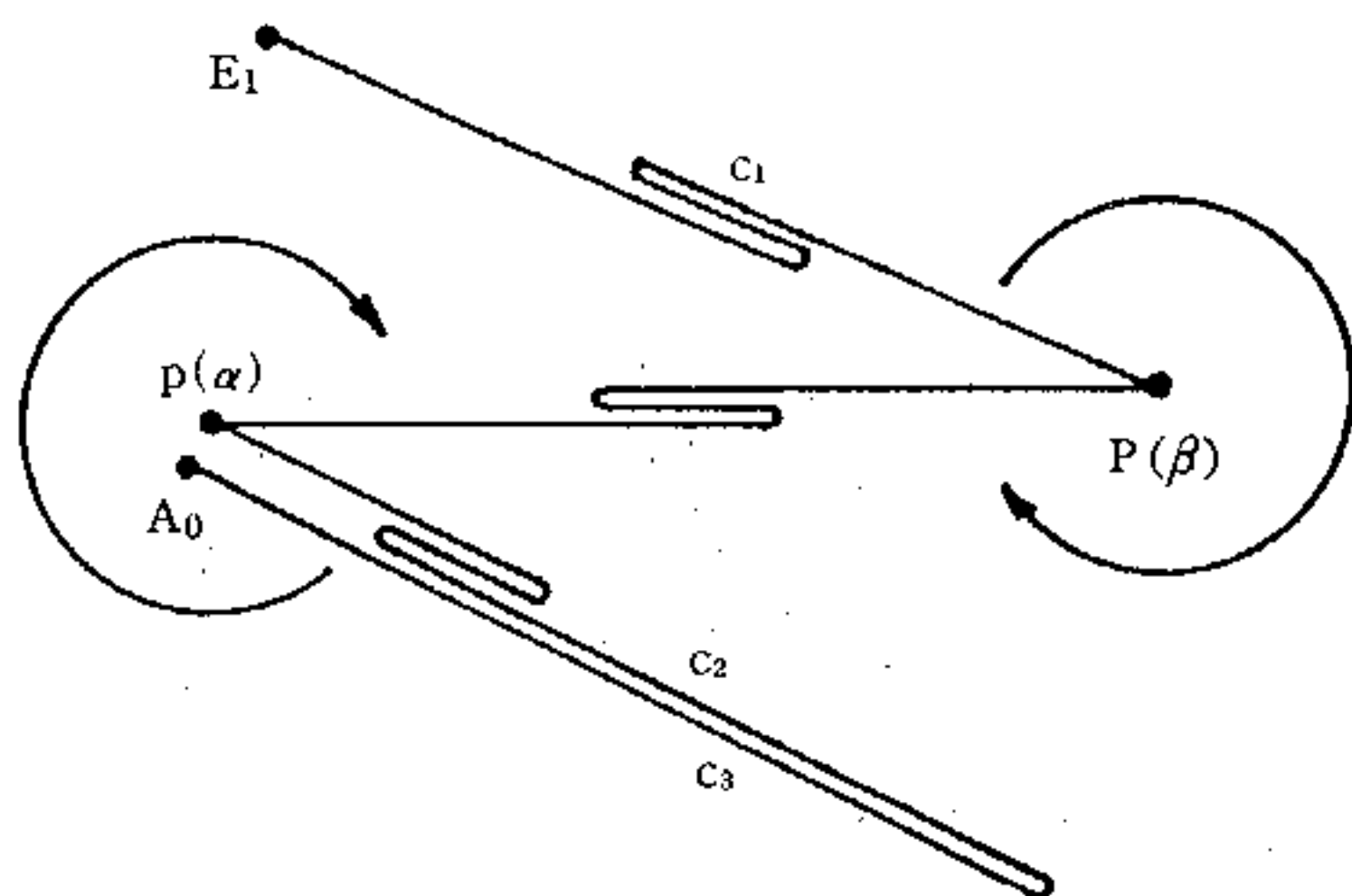
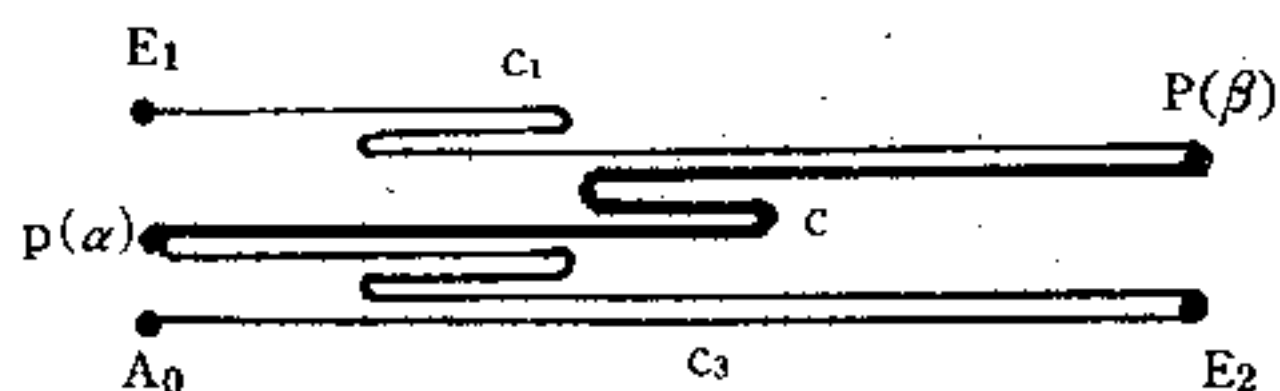


図 8.3

証明 (i) の場合、図 8.2(2), (3) のように点 A_0 を切り離して、ひだ c を反対側にぐるーっと回転移動させてからつなぎ直せばよい。(ii) の場合、 c で分けられている 2 つの部分の全リバーシブルひだのうち、 c とつながっている全リバーシブルひだ $c_1 = P(\beta) \rightarrow E_1$, $c_2 = E_2 \rightarrow P(\alpha)$ の端点の座標は $x(E_1) = 0$, $x(E_2) = x(P(\beta)) = \text{Max}\{x(t); 0 \leq t \leq 2\pi\}$ なので、ひだ $A_0 \rightarrow E_2$ は全リバーシブルひだになる。これを c_3 で表す。そして図 8.3(2), (3) のように c_1 , c_2 と c_3 を移動させ c_2 と c_3 で c と c_1 を包み込み、 A_0 と E_1 をつなぐと実現が得られる。

注意：円板の平坦折り紙を実際に折りたたむとき、折り線の山谷を決めていても、折りたたまれたものがひとつに定まる訳ではない。例えば、図 8.4(1) と (2) の山谷は全く同じである。このようなひだの重なりの違いは本稿では考慮していない。補題 8.2(i) で、「外側に出せる」という表現をしたのはこのような理由に依る。

(ii) の場合、折り直しは、全リバーシブルひだの途中にある細かいひだをぴったりくっつけると、図 8.5 のように 1 本の線分になるので、端から端までの大きなひだ c' の折り直しと見なせる。一方 (i) の場合の折り直しは、図 8.6 のように、折りたたんだものを一旦広げて裏返してから、再び折りたたんだ

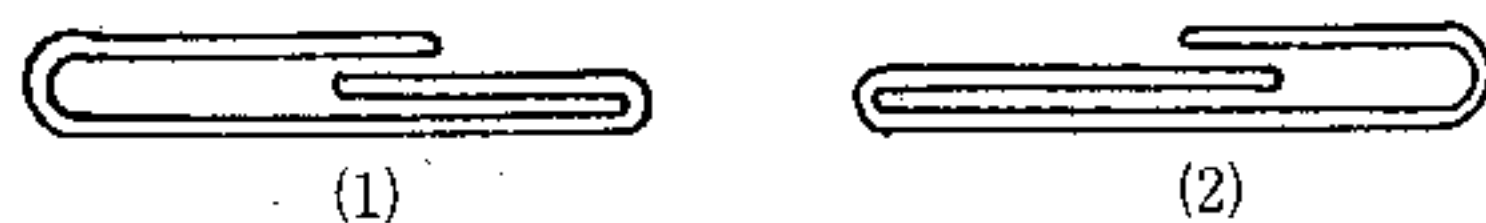


図 8.4

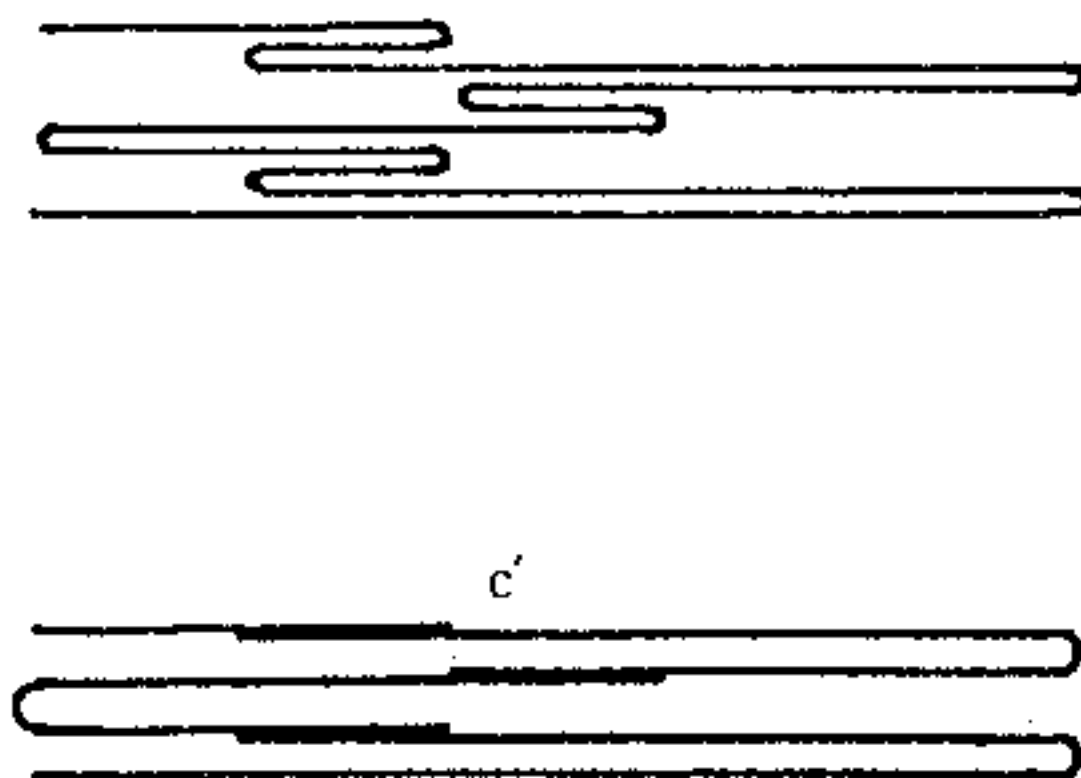


図 8.5

ものである。色紙でこの作業を行うと、内側が表に出てくることが分かる。従って、この操作はひだの折り直しと言うよりポケットの裏返しと言った方がよい。

また図 8.7(1)のような実現では、全リバーシブルひだ c は内部にあるが条件(ii)を満たしていない。 c の両端の折り線の山谷を逆にしようとしても、(2), (3)のようにつなぐことができない。

補題 8.2 で全リバーシブル区間の両端の折り線の山谷を逆にする操作を (i) の場合に t_c , (ii) の場合に u_c で表すことにする。 t_c, u_c とも r_c 同様に、山谷を逆にする折り線の番号を添え字につけて表わすこともある。これらの操作 t_c, u_c は R から C への写像であるが、 R の中への写像とは限らない。すなわち、実現 l に対して t_{cl} や u_{cl} が実現でないことがある。これは補題 8.2 に反しているように思えるがそうではない。任意の山谷写像 $l \in R \subset C$ に対して、 t_{cl} と u_{cl} はともに山谷写像であるが、補題 8.2 の主張は全リバーシブルひだ c が (i) か (ii) を満たすような位置にくる実現 l に対して t_{cl} や u_{cl} が実現になるということである。このことは、任意の実現 l に対する自由なリバーシブルひだ c の折り直し r_c が必ず実現を導くのと大きく異なる。

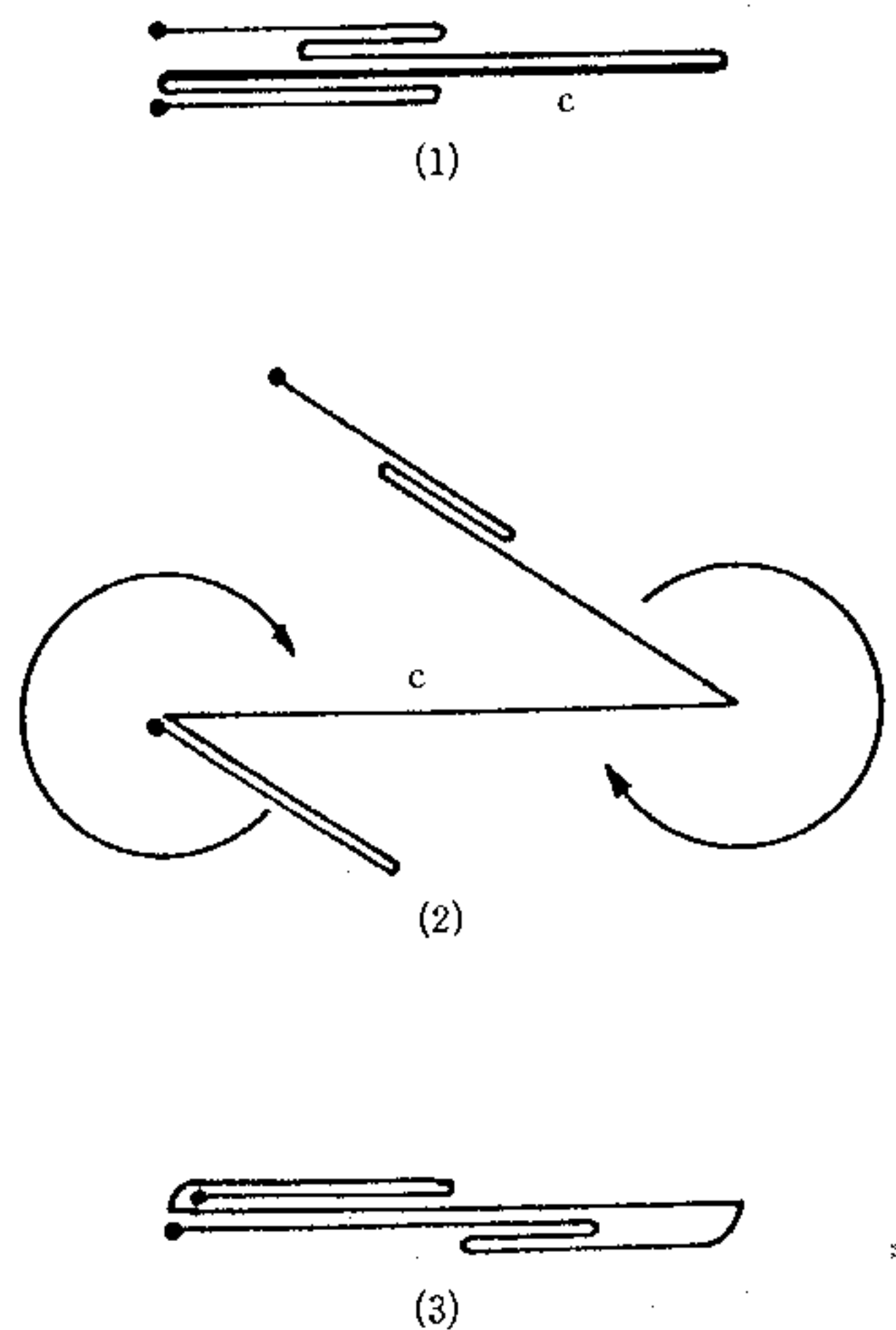


図 8.7

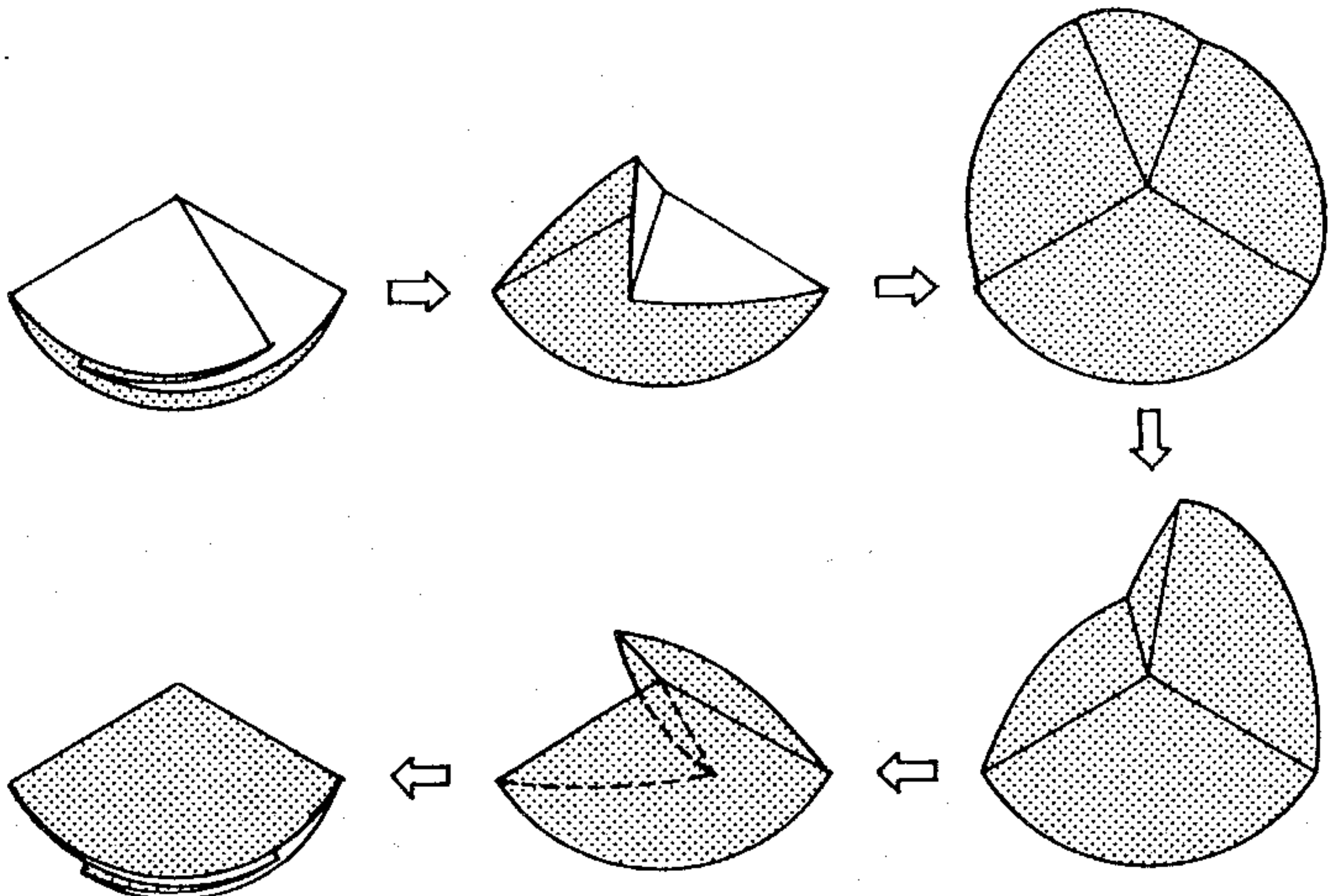


図 8.6

9. 裏

円板の平坦折り紙 K のひとつの実現 l を一旦広げて紙の裏側から見ると、折り線の山谷が全て逆になる。そこで、 l の山谷を全て逆にしたものは K の実現であることがわかる。以下これを $\bar{l}$ で表し、 l の裏と呼ぶ。そして l から $\bar{l}$ を作る操作を R で表し、これも裏と呼ぶことにする。

補題9.1 円板の平坦折り紙 K に対して、裏 $R: C(K) \longrightarrow C(K)$ は $R(K)$ から $R(K)$ への全単射である。

10. スライド

これまで、実現 l に作用して新しい実現を作る操作 r_c, t_c, u_c, R を得た。しかしこれが問題7.3の基本的な操作の全てではない。例4.4の正規化の変

更は図10.1の2点A, Bに対応する折り線の山谷を逆にすることと同じである。この操作を s で表す。

11. 円板の平坦折り紙の全ての折りたたみ

折り線の数 $2n$ が4の場合に、これまでの折り直しがどのような関係になっているか調べる。

例11.1 図11.1(1)のように、 $\gamma < \beta, \delta < \alpha$ の場合、交代おれ線から作られる実現 l_0 は(2)のようになる。 $c = P_1 \rightarrow P_0$ と $d = P_0 \rightarrow P_2$ は全リバーシブルひだである。また c は自由なりバーシブルひだでもある。(4)のように $t_d = t_c = r_c R$ であり

$$R(K) = \langle r_c \rangle \otimes \langle R \rangle \cdot l_0 \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$$

となる。 $\otimes$ は群の直積、 $\langle r_c \rangle$ は r_c で生成される C の部分群を表わす。

例11.2 $\gamma = \beta < \delta = \alpha$ の場合、図11.2(1)の折り

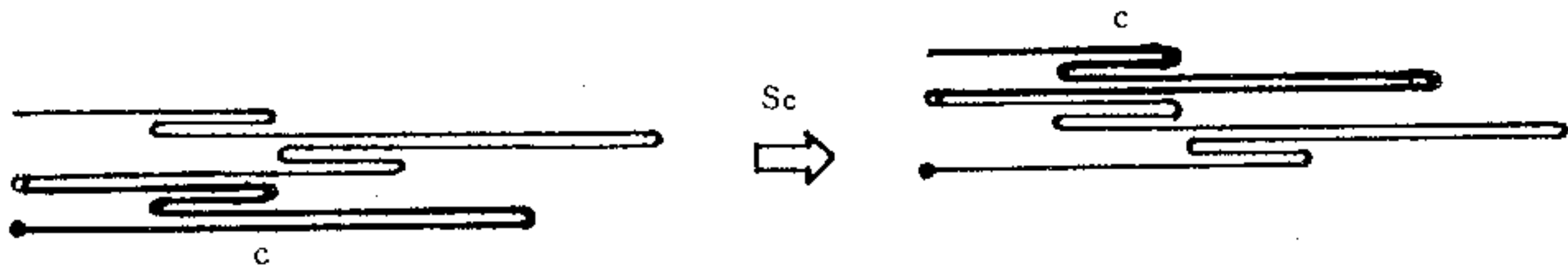


図10.1

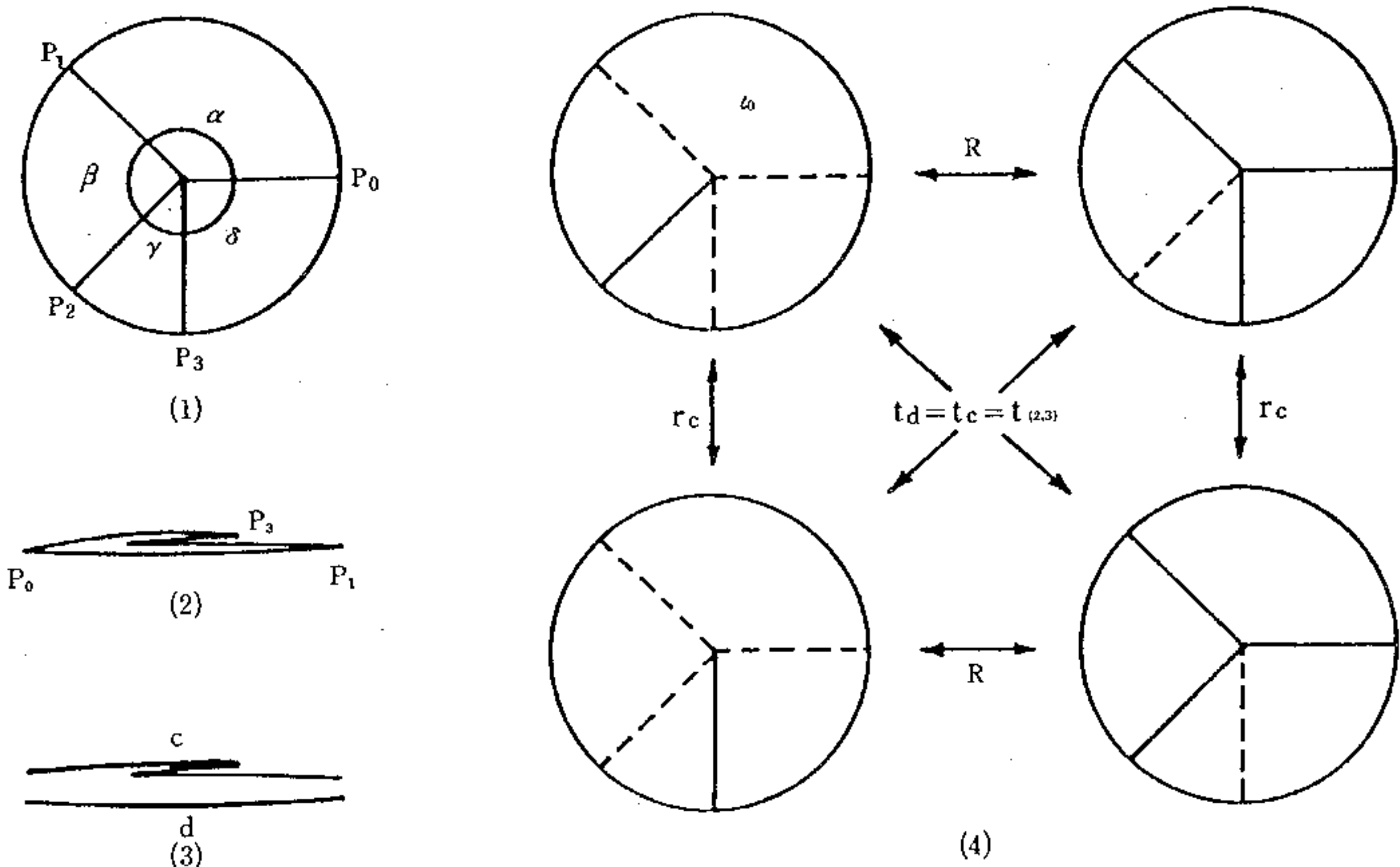


図11.1

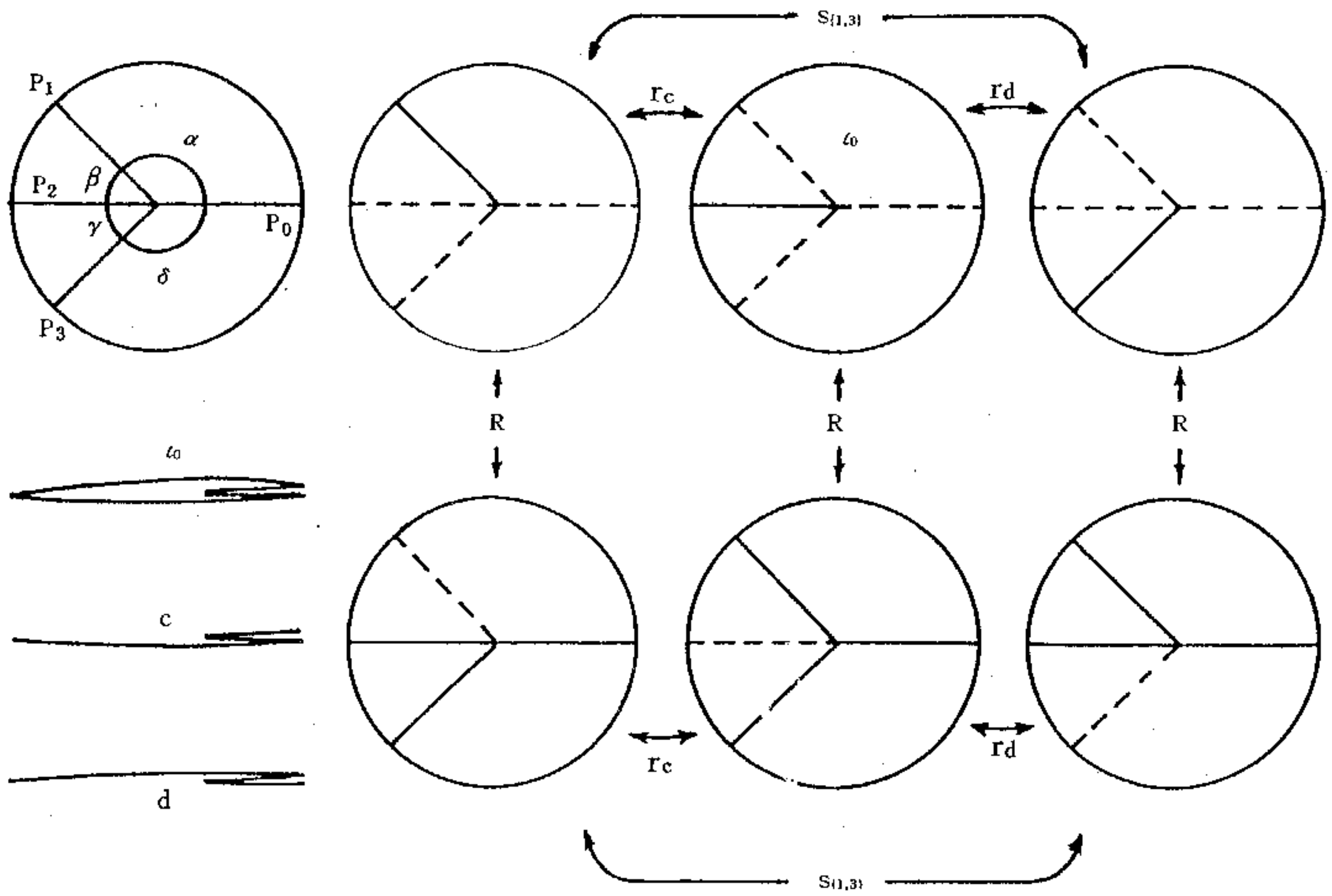


図11. 2

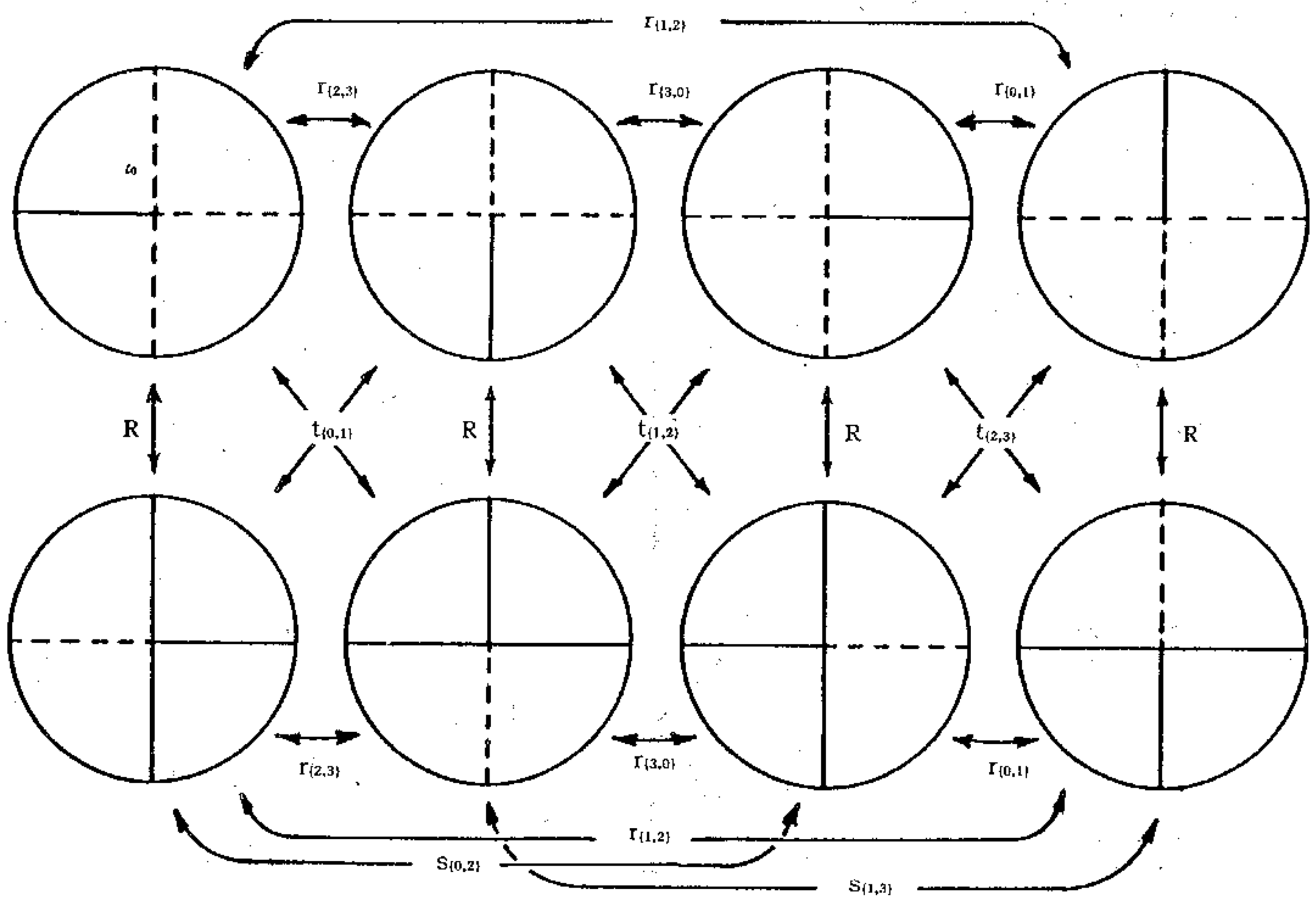


図11. 3

紙 K には(2)のように6つの実現がある。 u_0 は交代おれ線から得られる実現である。 r_{cl} は実現であるが、 $r_d r_{cl}$ は実現ではない。これは $R(K)$ が $C(K)$ の部分群になっていないことを意味する。このことは、 $R(K)$ の位数が $C(K)$ の位数16の約数になっていないことから分かる。

$$R(K) = \{1, r_{(1,2)}, r_{(2,3)}\} \otimes \langle R \rangle \cdot u_0$$

例11.3 $\gamma = \beta = \delta = \alpha = \pi/2$ の場合、対称性を考えると、この折り紙 K には図11.3のような8つの実現がある。 u_0 は交代おれ線から得られる実現である。

$$R(K) = \langle r_{(1,2)} \rangle \otimes \langle r_{(2,3)} \rangle \otimes \langle r_{(3,0)} \rangle \otimes \langle r_{(0,1)} \rangle \cdot u_0 \cong (Z/2Z)^4$$

となる。

以上が折り線の数 $2n = 4$ の場合の全てである。確かに、ひとつの実現 u_0 に5種類の基本操作 r_c, t_c, u_c, R, s_c を繰り返し作用させることで全ての実現が得られている。このことは、 $2n > 4$ の場合にも成立する。すなわち、

定理11.4 (円板の平坦折り紙の全ての実現) 円板の平坦折り紙 K に対して、その平坦な折りたたみはひとつの折りたたみに r_c, t_c, u_c, R, s_c を繰り返し作用させることで全て得られる。

証明(折り線の数に関する数学的帰納法) 円板の平坦折り紙 K の任意の実現 u_1, u_2 に対して、 $R(K)$ か

らはみださないように基本操作をほどこして、 u_1 を u_2 に変形できることを示せばよい。

(i) $2n = 4$ の場合：例11.1, 2, 3により定理は成立する。

(ii) 折り線の数 $2n$ の円板の平坦折り紙 K の任意の実現 u_1, u_2 に対して、

(イ) 図11.4(1)のような自由なりバーシブルひだが存在する。

(ロ) (イ)が成り立たないで、図11.4(2)のようなバーシブルひだが存在する。

(ハ) (イ), (ロ)以外。すなわち、図11.4(2)のようなひだしか存在しない。

の3つの場合に分けて考える。

まず(イ)の場合。実現 u_1, u_2 で、区間 $[\alpha, \beta]$ に対応する自由なりバーシブルひだを c_1, c_2 で表わす。 c_1 と c_2 の山谷が同じであればそのまま、逆であれば r_{cl} を作用させて $r_{cl}u_1$ を作り、これを新たに u_1 とする。 u_1 と u_2 でひだ c_1, c_2 をぴったりと貼り合わせると、おれ線の頂点が2個消滅し、おれ線の長さが

$$L = (\beta - \alpha) - |x(\beta) - x(\alpha)|$$

だけ縮まる。このようにしてできたおれ線を η_1, η_2 で表わす。 η_1 と η_2 は図11.5のような折り紙の実現と解釈できる。そしてこのおれ線の頂点数は $2n - 2$ である。従って帰納法の仮定により、 η_1 に5種類の基本操作を $R(K)$ からはみださないようにほどこして η_2 が得られる。この操作を f で表わすと、 $\eta_2 = f\eta_1$ と書ける。ぴったりと貼り合わせた u_1 のひだ c_1 は1本の線分と見なせるので操作 f の妨げにはならない。従って、 f を u_1 にほどこすことができる。こうして得られる $f u_1$ と u_2 の違いはひだ c_1 と c_2 の部

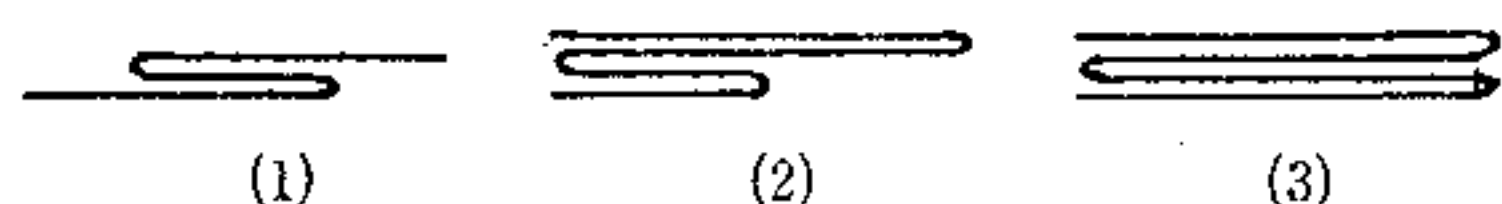


図11.4

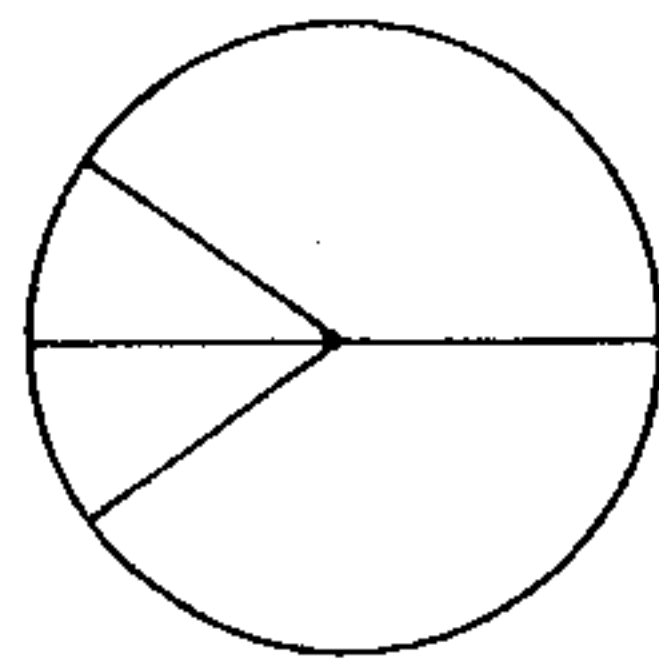
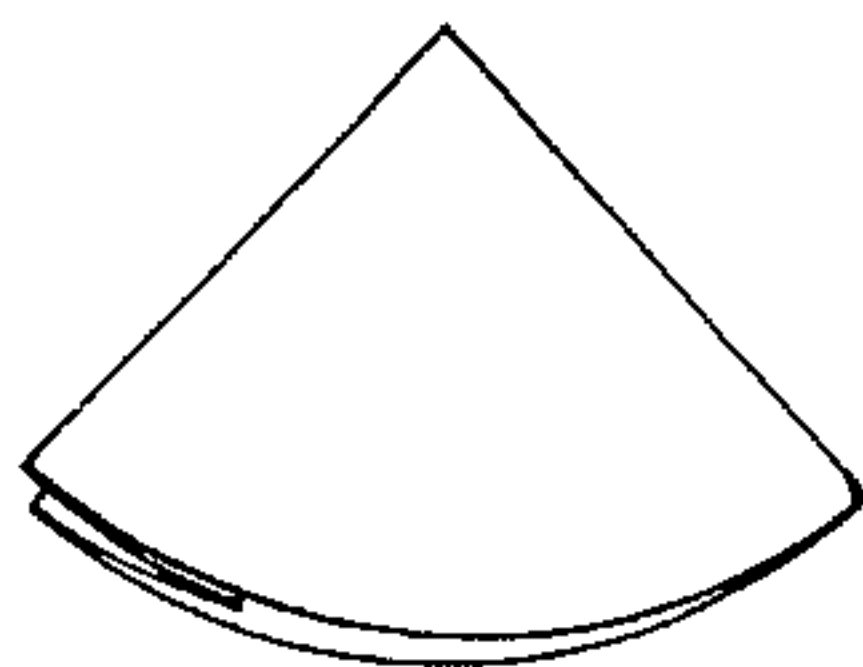
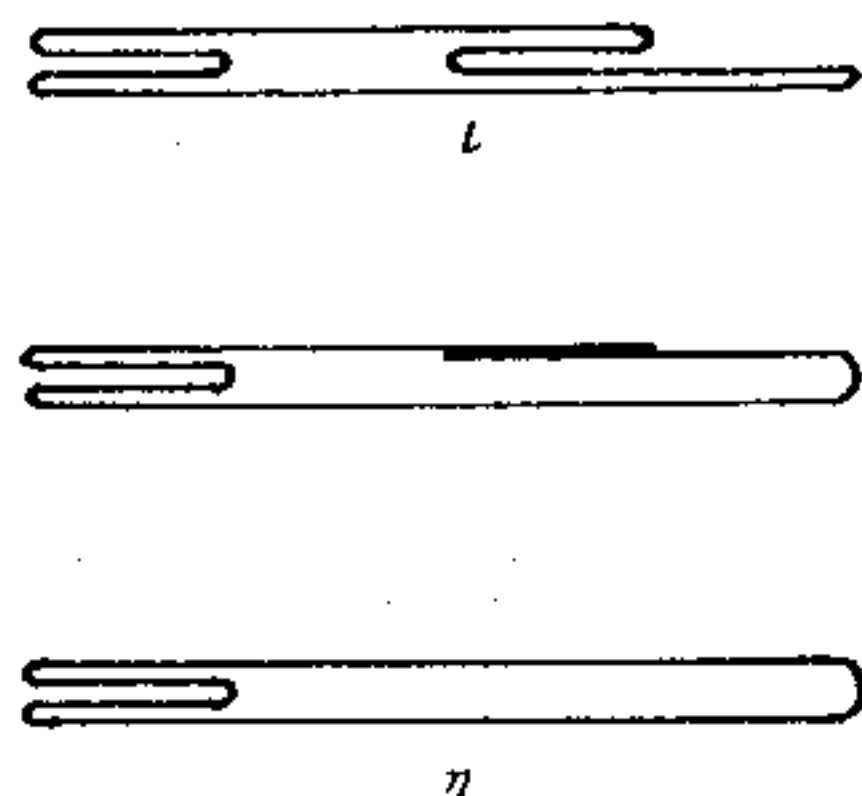


図11.5

分に限られる。しかし、あらかじめ c_1 と c_2 を同じになるようにしていたので、 $f_{c_1} = f_{c_2}$ である。

次に、(ロ)の場合。図11. 4(2)のひだの短い線分はおれ線の中で最も短いものとしてよい。もし、もっと短い線分が離れて存在するならば、それは(イ)のような自由なりパーシブルひだを構成するからである。このひだを、図11. 6(1)のようにぴったりと貼り合わせる。図11. 6(2)のように、他のひだが間にはさまれていれば、(4)、(5)のように外側に出す。なお(4)では山谷の変更はない。(5)では丸印の2つの折り線の山谷を逆にする操作 r が作用している。ぴったりと貼り合わせたひだを切り取ると頂点数が $2n - 2$ の実現が得られるので、以下(イ)の場合と同様にして u_1 から u_2 への変形を得る。(ハ)の場合も(ロ)と同様にできる。

(i), (ii) が示されたので、数学的帰納法により、 $2n \geq 4$ なる全ての自然数 n に対して命題が成立する。

12. 頂点が2個の場合

頂点が1つの場合の折り線の山谷は一応分かった。円板の平坦折り紙の次に構造が簡単なのは頂点が2個の場合である。図2. 1(3), (4)はともに頂点毎に実際に平坦に折りたためるように山谷が付けられている。しかし(3)は実際に平坦に折りたたむことができるが、(4)は平坦に折りたためない。すなわち、頂点毎の実現写像 u を矛盾無くつないでも、折り紙全体の実現写像になるとは限らないのである。なお例2. 4の折り紙に実現がなかったのは、頂点毎の実現写

像を矛盾無くつないぐことができなかったからで、図2. 1(4)とは事情が違う。

2つの円板の平坦折り紙をつなぎ合わせたものが、頂点数2の平坦折り紙になるには、図12. 1(1)において折り線 ℓ_1 と ℓ'_1 , ℓ_{2n-1} と ℓ'_{2m-1} がぶつからないように、

$$\alpha_1 + \beta_1 \geq \pi,$$

$$\alpha_{2n} + \beta_{2m} \geq \pi$$

となる必要がある。この条件を満たす平坦折り紙を2点平坦折り紙と呼ぶことにする。これに合わせて、円板の平坦折り紙を無限に広い平面で考えるときには、1点平坦折り紙と呼ぶことにする。

問題12. 1 2点平坦折り紙 K の折り線の山谷の関係はどのようなになっているか。 K の実現全体 $R(K)$ の構造を調べよ。

点A中心の1点平坦折り紙 K_1 の実現 u_1 と点B中心の1点平坦折り紙 K_2 の実現 u_2 から、 u_1 と u_2 を矛盾無くつないで K の実現 u を作るには、 $u_1(\ell_0) = u_2(\ell_0)$ となる必要がある。しかし例2. 3で示したようにこれだけでは十分ではない。図12. 1(1)の2点平坦折り紙を面 ρ を固定して折りたたむと、隣りの面 σ, τ は(2)の位置に移動する(図12. 1(2))。従って、 $[\rho]\sigma$ と $[\rho]\tau$ が重なる必要十分条件は

$$(\alpha_1 - \alpha_2) + (\beta_1 - \beta_2) < \pi,$$

$$0 < \alpha_1 + \beta_1 - \pi < \alpha_2 + \beta_2$$

となる。そこで、次の命題を得る。

補題12. 2 図12. 1(1)のような2点平坦折り紙 K

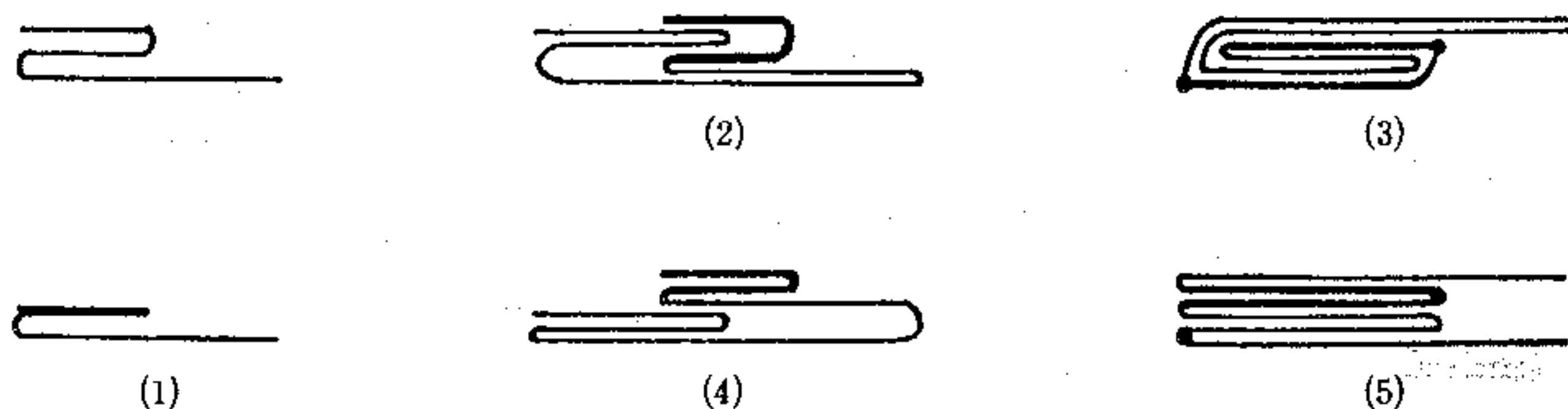


図11. 6

に対して、点A中心の1点平坦折り紙 K_1 の実現 u_1 と点B中心の1点平坦折り紙 K_2 の実現 u_2 を貼り合わせた K の山谷写像 u が実現になるための必要条件は、

- (i) $u_1(\ell_0) = u_2(\ell_0)$,
- (ii) $0 < \alpha_1 + \beta_1 - \pi < \alpha_2 + \beta_2$ ならば $u_1(\ell_1) + u_2(\ell'_1) = 0$
- (iii) $0 < \alpha_{2n} + \beta_{2m} - \pi < \alpha_{2n-1} + \beta_{2m-1}$ ならば $u_1(\ell_{2n-1}) + u_2(\ell'_{2m-1}) = 0$

$\alpha_1 + \beta_1 - \pi \geq \alpha_2 + \beta_2$ の場合には、 $[\rho]\sigma$ と $[\rho]\tau$ が重なることはないので、どちら向きに折っても良いように思われる。しかし、図12.2(1)の2点平坦折り紙では、 $[\rho]\sigma_4$ と $[\rho]\tau_4$ は(2)の斜線部分になり重なるので、 $[\rho]\sigma_2$ と $[\rho]\tau_2$ が重ならないにもかかわらず、 ℓ_1 と ℓ'_1 の山谷は逆にしなくてはならない。このように補題12.2にのみ頼っていたのでは、2点平坦折り紙の山谷の関係を簡潔に説明できそうにない。問題を難しくしているのは、面 ρ の存在である。 ρ は σ_2 、 τ_2 に比べて広いようであるが、補題12.2と補題3.2を比較すると、1点平坦折り紙の狭い角度の面に似た役割を演じている。

図12.3(2)は(1)のひとつの実現である。これから、(3)の影で示した一定巾の帯を切り取る。そして再び

貼り合わせてから広げると、(5)のようになる。これは(1)の折り線 ℓ_0 の長さを短くしたものである。折りたたまれたひだが図12.4のように面 ρ と ρ' の間にはさまれていても、帯の切り取りは同様にできる。図12.5(1)は ℓ_0 を短くするとひだがぶつかるので、これに反するように思えるがそうではない。(1)は実現でないからである。2点平坦折り紙を実際に折るには、有限の広さに平面を切る必要がある。(1)では小さく切り取っているのに、ひだcとdがぶつからなかったが、少し大きく切り取りとってから折るとぶつかってしまう。従って、1点平坦折り紙の場合と違い、2点平坦折り紙を実際に折りたたむとき、注意して紙を切りとらなくてはならない。

話を元に戻す。図12.3の(2)と(4)では、折り線の山谷の関係が全く同じであることが分かった。では切り取る帯の巾を目いっぱい広くとって、 ℓ_0 の長さを0にしたらどうなるであろうか。折りたたんだ状態で帯を切りとってつないで広げると、図12.3(2)から(6)が得られる。これには頂点が1つしかないので、当然1点平坦折り紙の実現である。実際、 K の面 ρ だった所を出発点としてひとつおきに角度の和をとると、

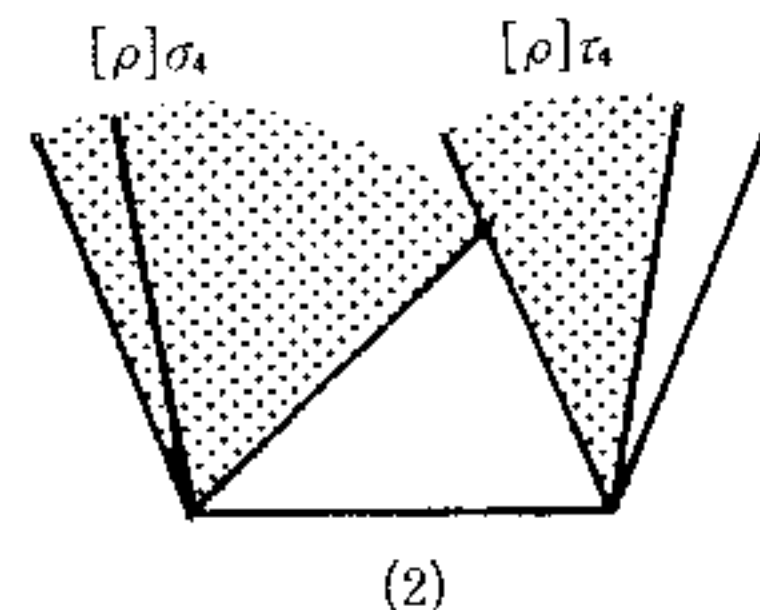
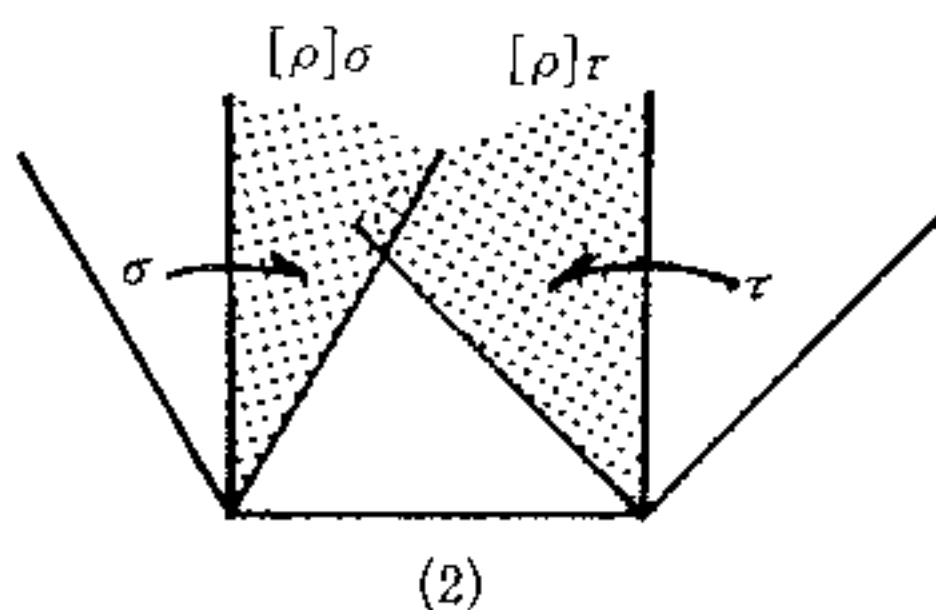
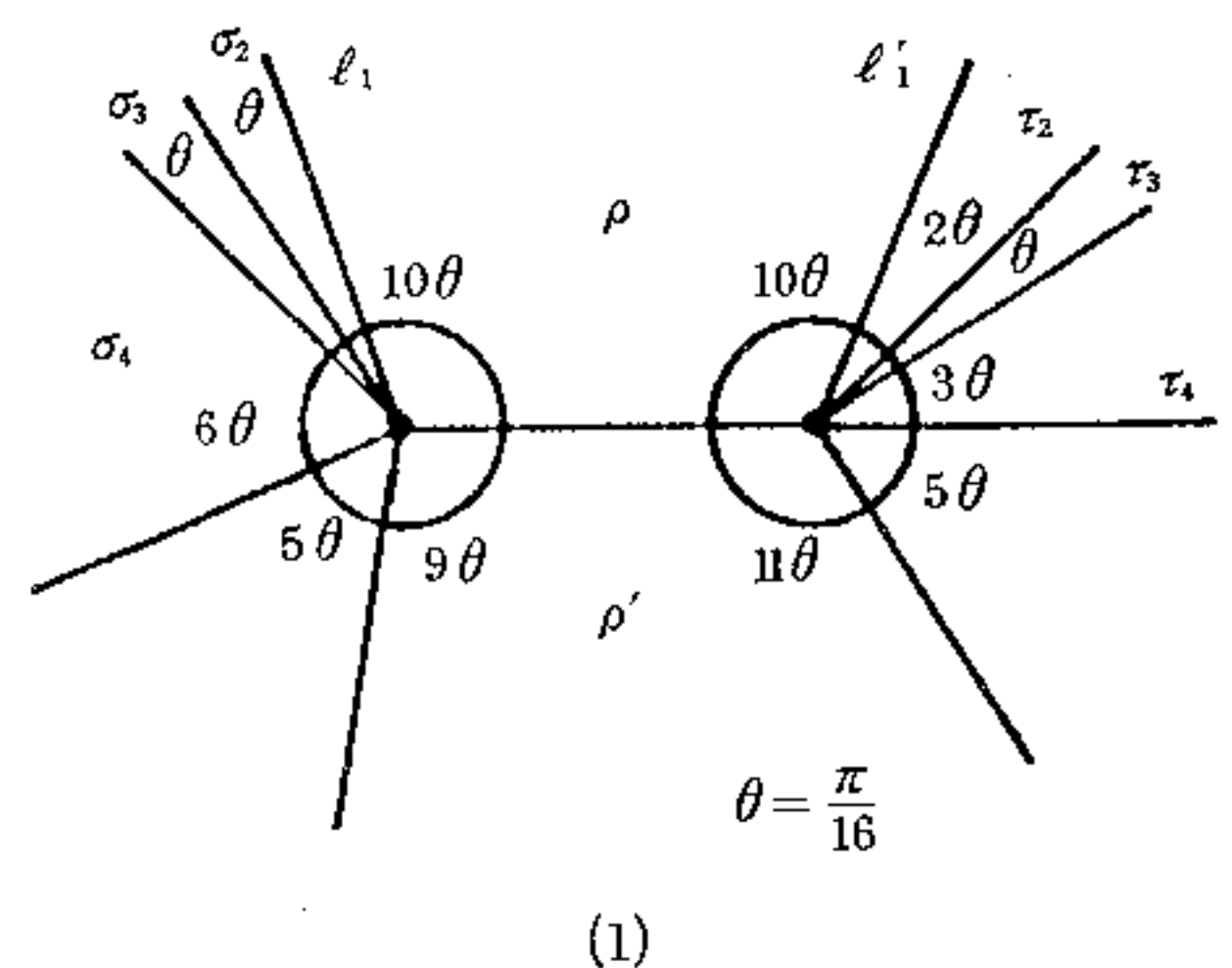
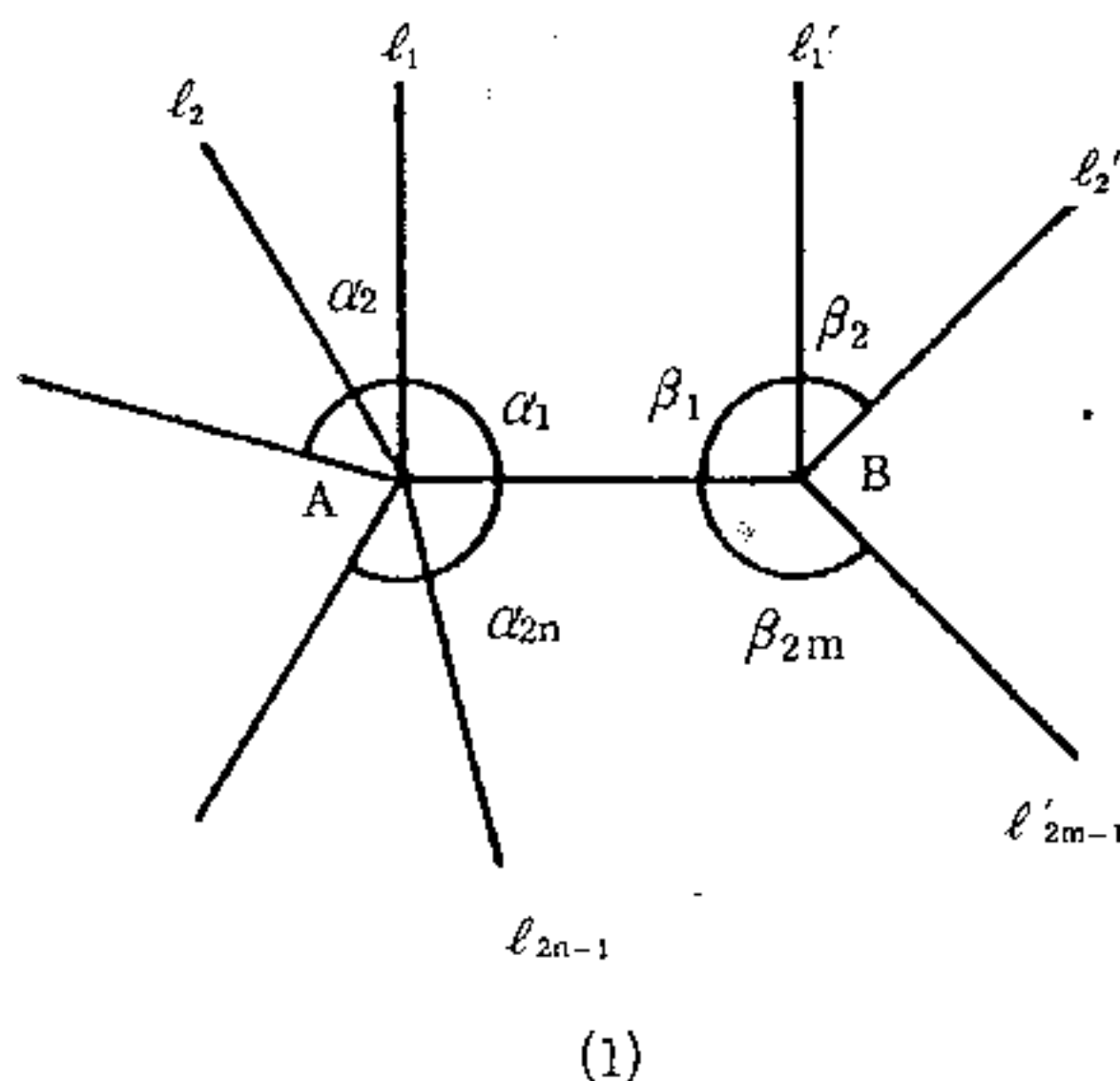
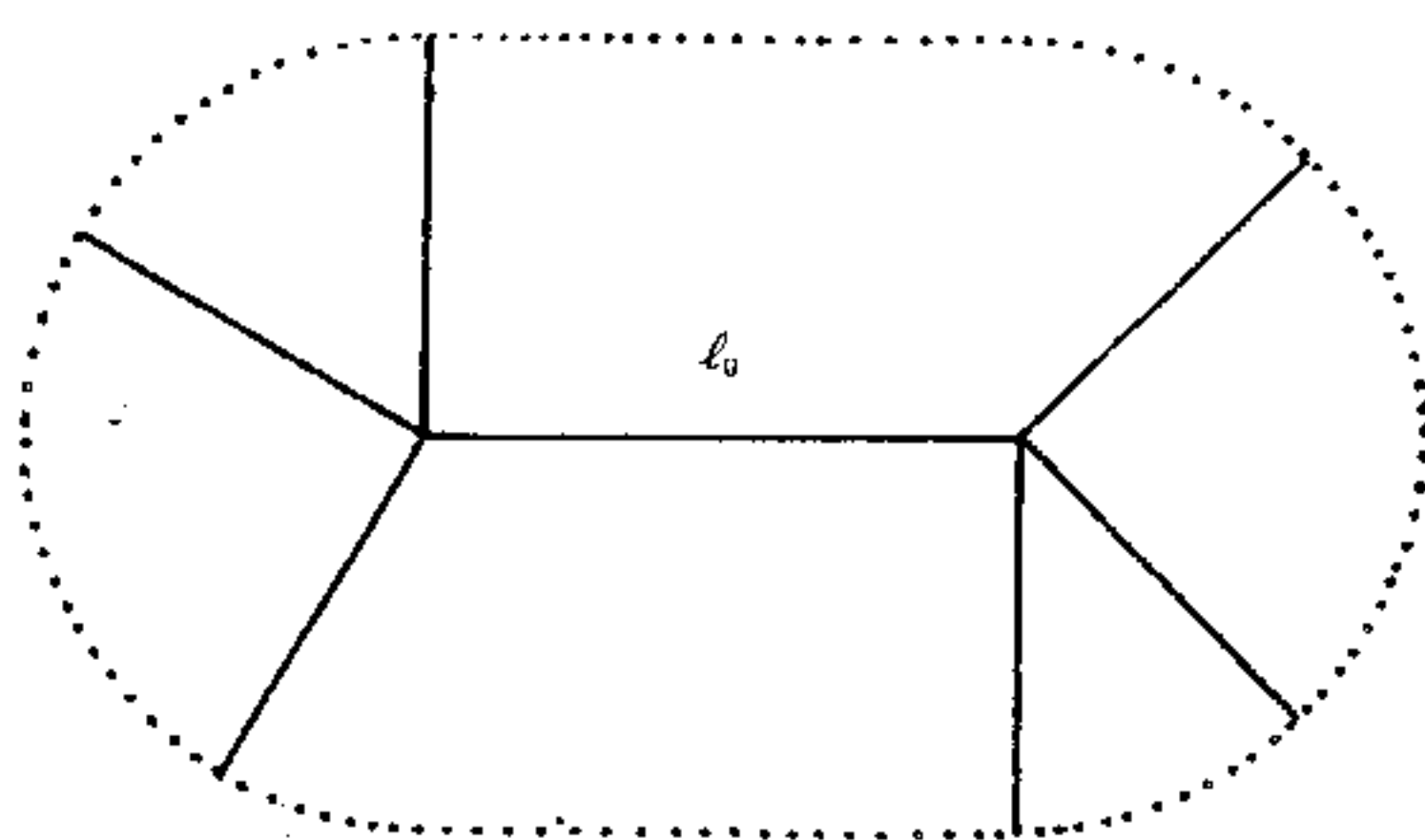
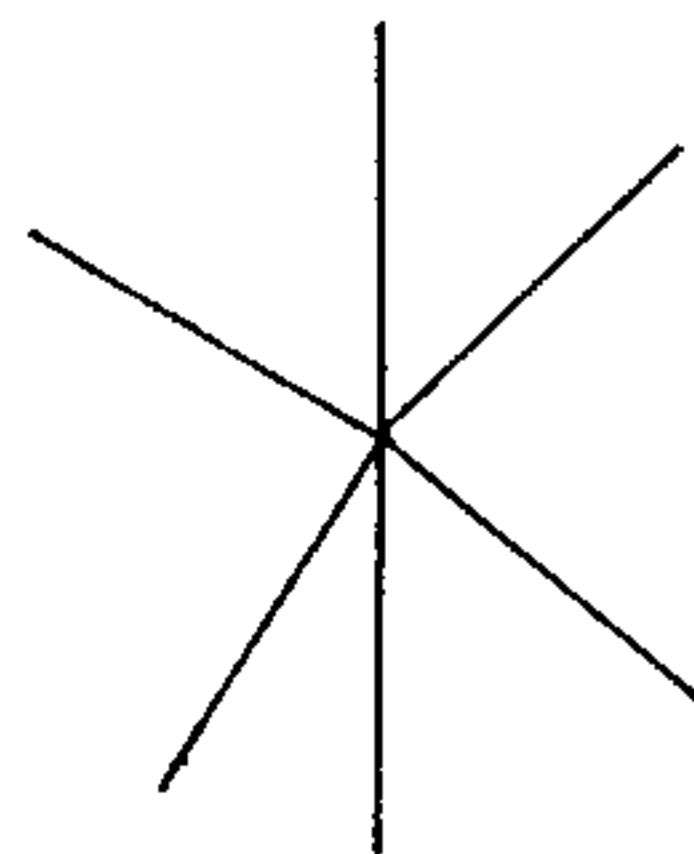


図12.1

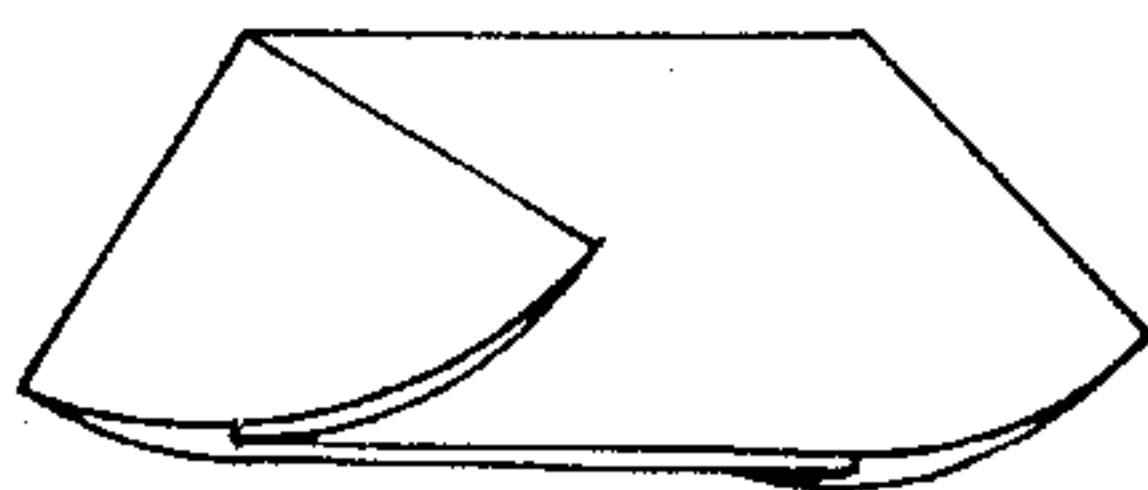
図12.2



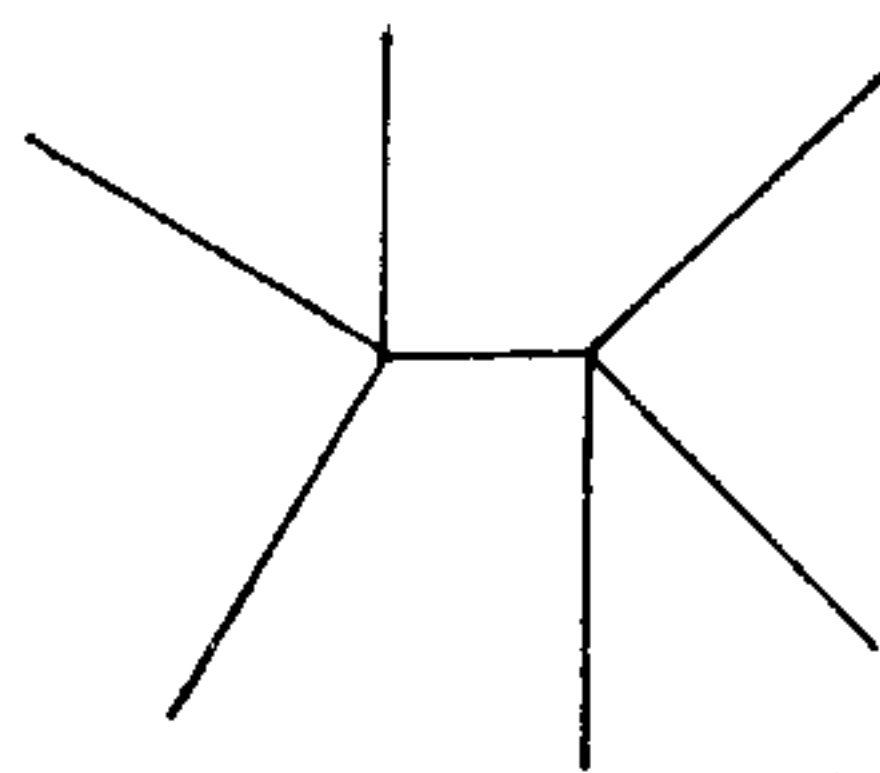
(1)



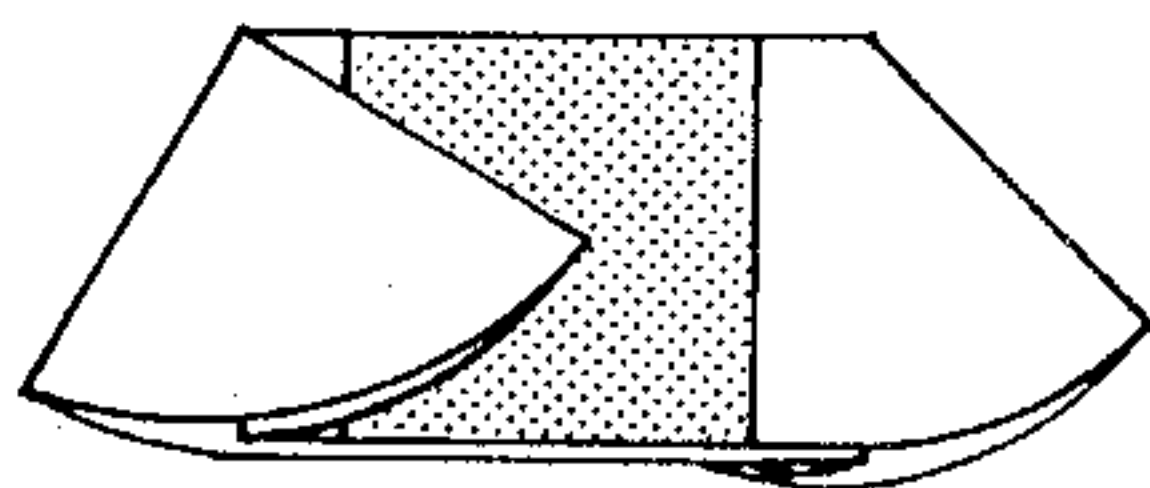
(6)



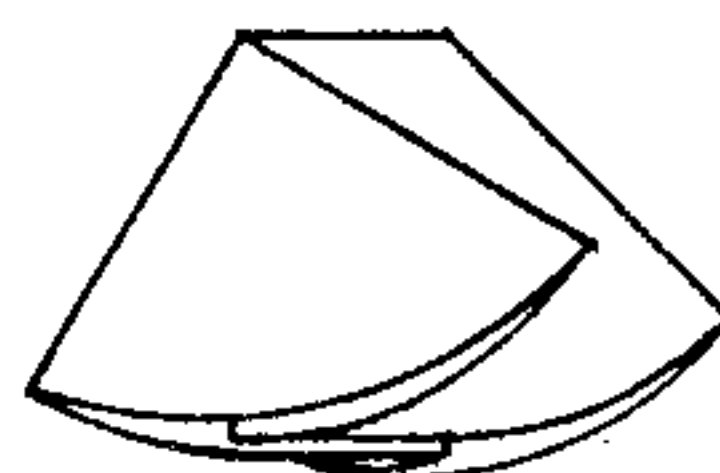
(2)



(5)

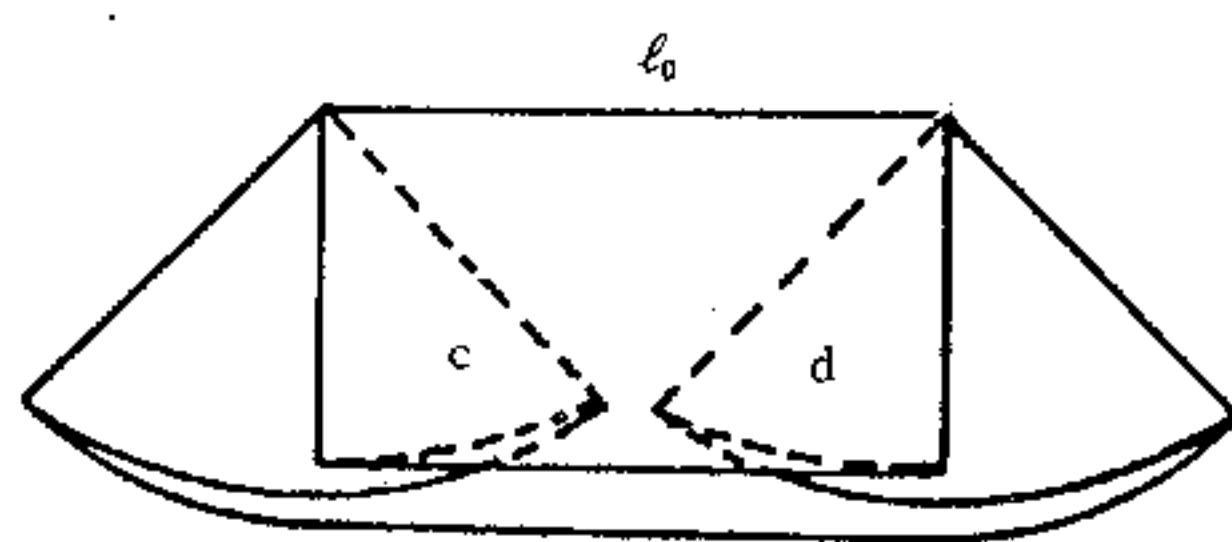
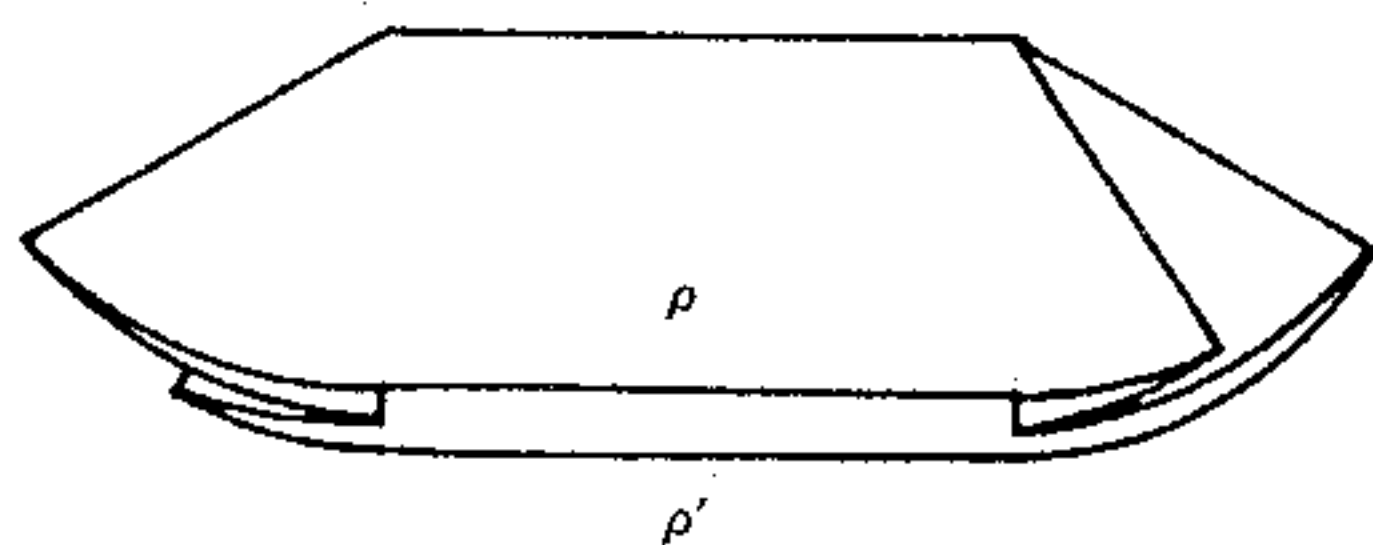


(3)

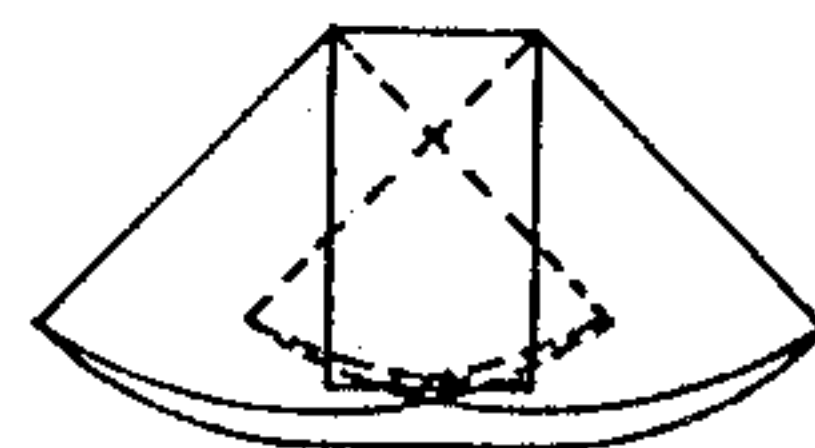
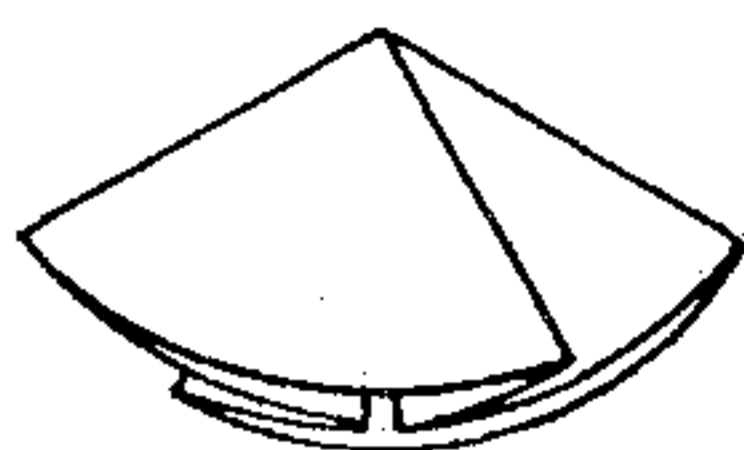


(4)

図12. 3



(1)



(2)

図12. 4

図12. 5

$$\begin{aligned}
 & (\alpha_1 + \beta_1 - \pi) + \alpha_3 + \cdots + \alpha_{2n-1} + \beta_3 + \cdots + \beta_{2m-1} \\
 &= (\alpha_1 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_{2n-1}) + (\beta_1 + \beta_3 + \cdots + \beta_{2m-1}) - \pi \\
 &= \pi + \pi - \pi \\
 &= \pi
 \end{aligned}$$

となるから、平坦条件は成り立っている。

なお、図12. 6(1), 12. 7(1)の2点平坦折り紙のように、頂点の間隔を詰めて0にすることにより折り線の数減ることがある。しかしこれらの場合でも、1点平坦折り紙の実現を得ることが同様に確かめられる。従って、

定理12. 3 2点平坦折り紙 K の実現 ι が2つの

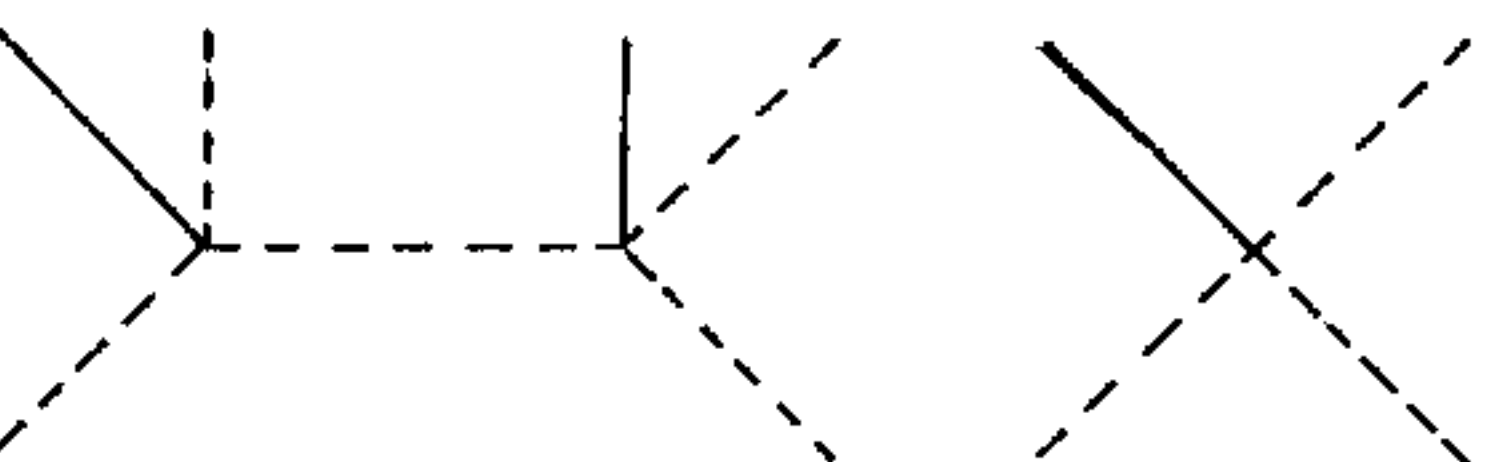
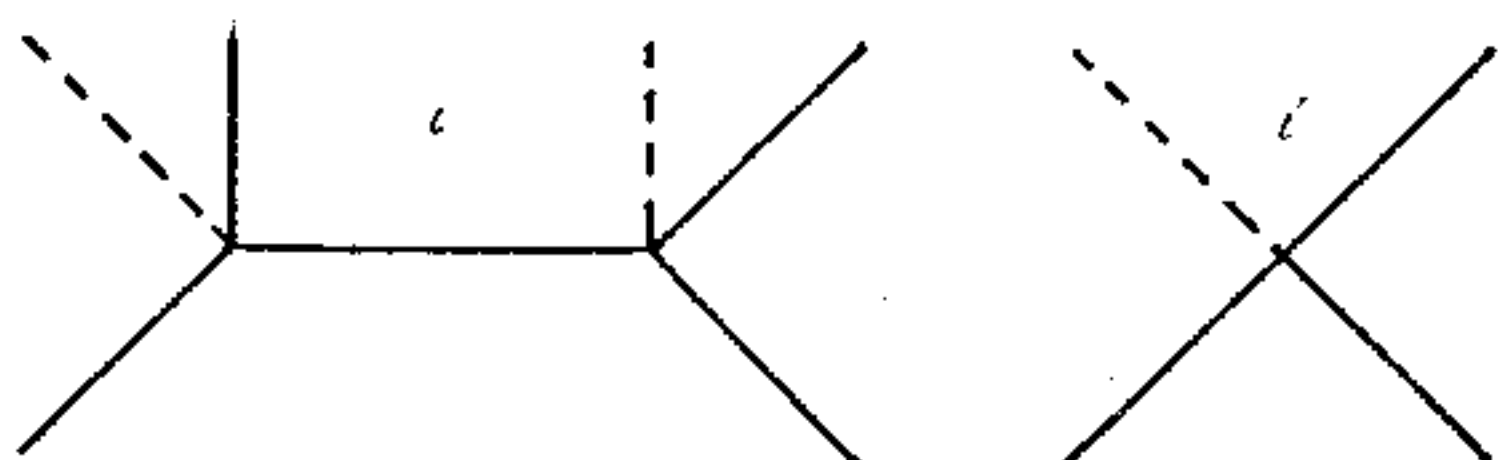
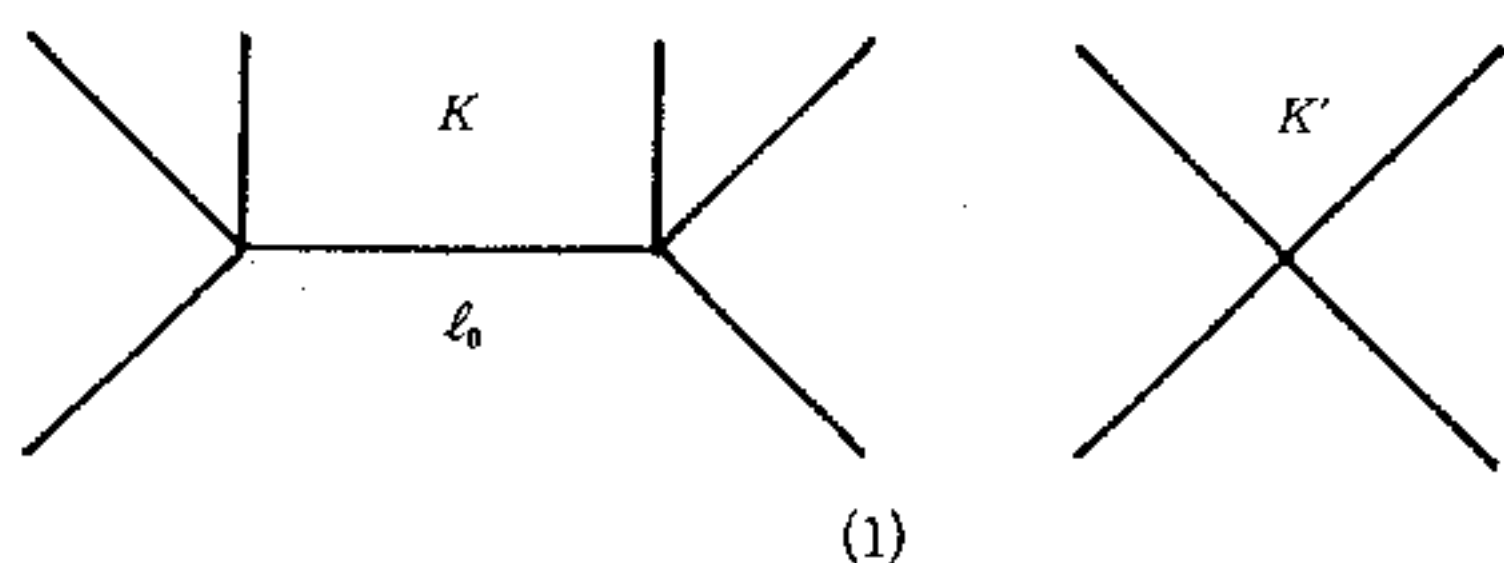


図12. 6

1点平坦折り紙 K_1, K_2 の実現 ι_1, ι_2 を貼り合わせたものであるならば、 K_1, K_2 の共通の折り線 ℓ_0 を縮めて得られる1点平坦折り紙 K' に ι を制限した K' の山谷写像 ι' は K' の実現になる。

この定理より、2点平坦折り紙 K の実現は、3つの1点平坦折り紙 K_1, K_2, K' の実現の組み合わせ(共通部分)の中から全て見つけ出すことができる。

例12. 4 図12. 6(1)の2点平坦折り紙 K は同じ形の1点平坦折り紙の貼り合わせである。それぞれ、実現は4つずつあるが、 $\iota_1(\ell_0) = \iota_2(\ell_0)$ より、4通りに減る。 ℓ_0 を縮めて得られる1点平坦折り紙 K' の山谷は図12. 6(2)のようになり、いずれも K' の実現になっている。定理より、 K の実現はこれらの中に全て含まれているが、実際これらは全て折りたたむことができる。

例12. 5 前の例と同様に、図12. 7(1)の2点平坦折り紙 K の実現の候補は、 $\iota_1(\ell_0) = \iota_2(\ell_0)$ より、8通りある。この内、(2)の山谷写像 ι からは K' の実現 ι' が得られるが、(3)の山谷写像 ι からは K' の実現は

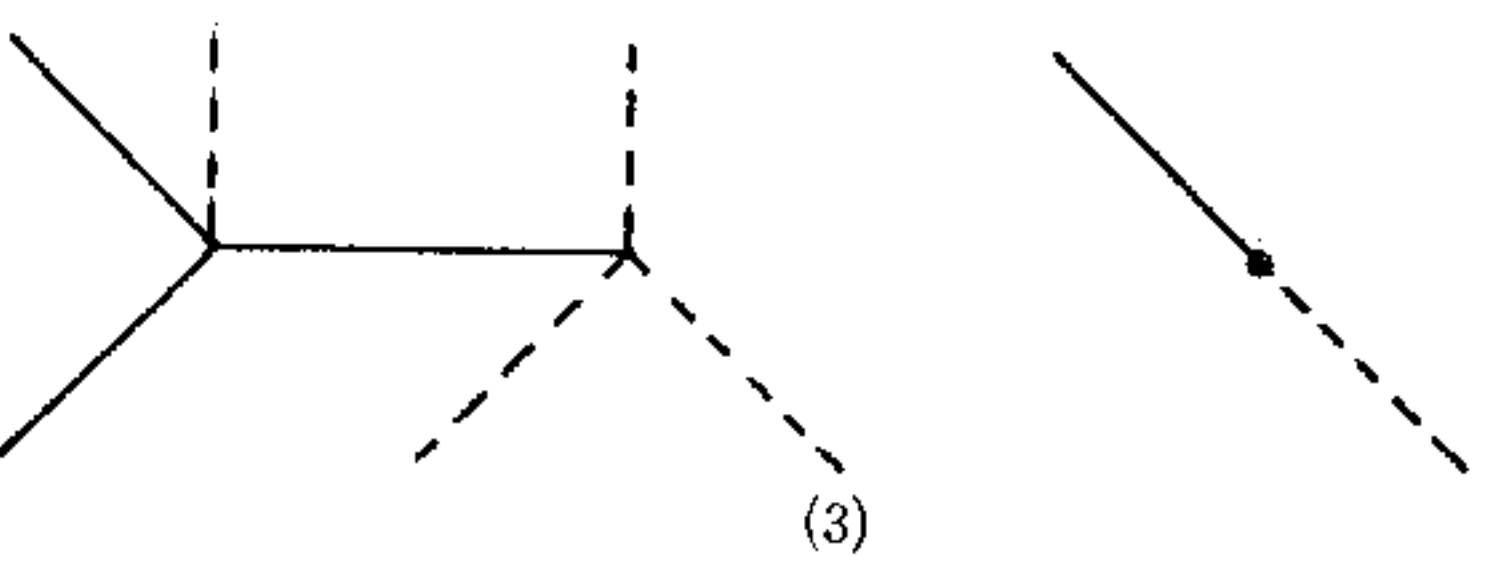
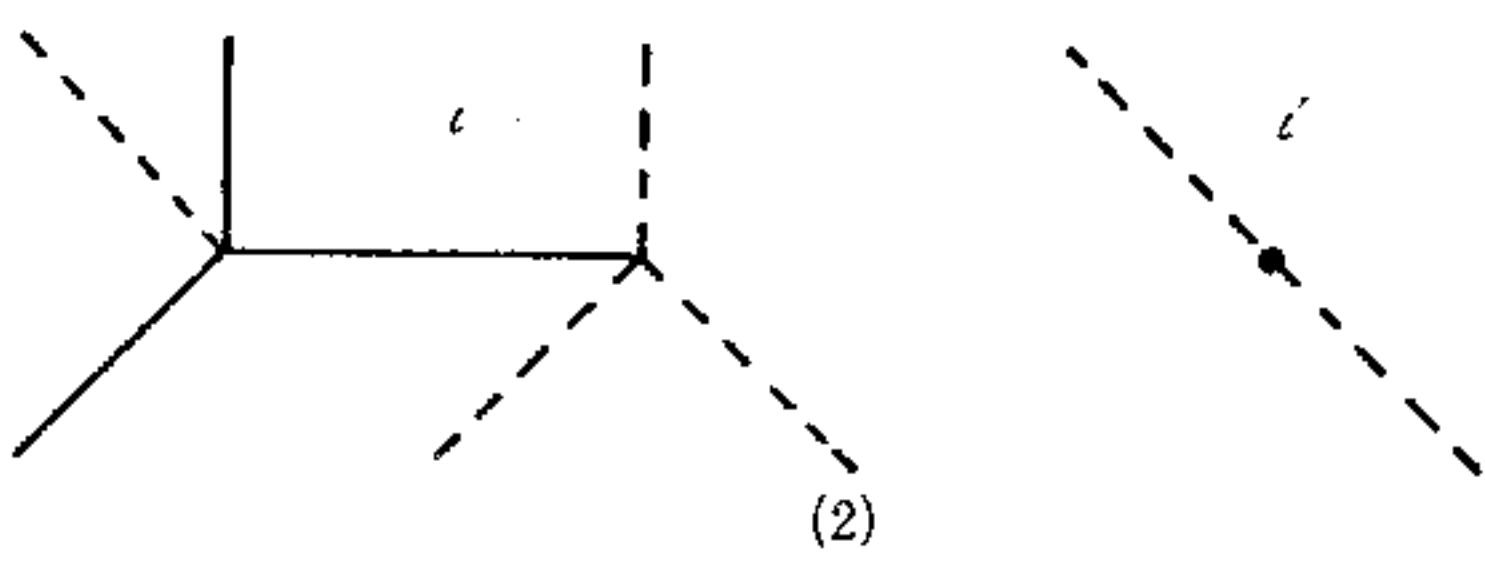
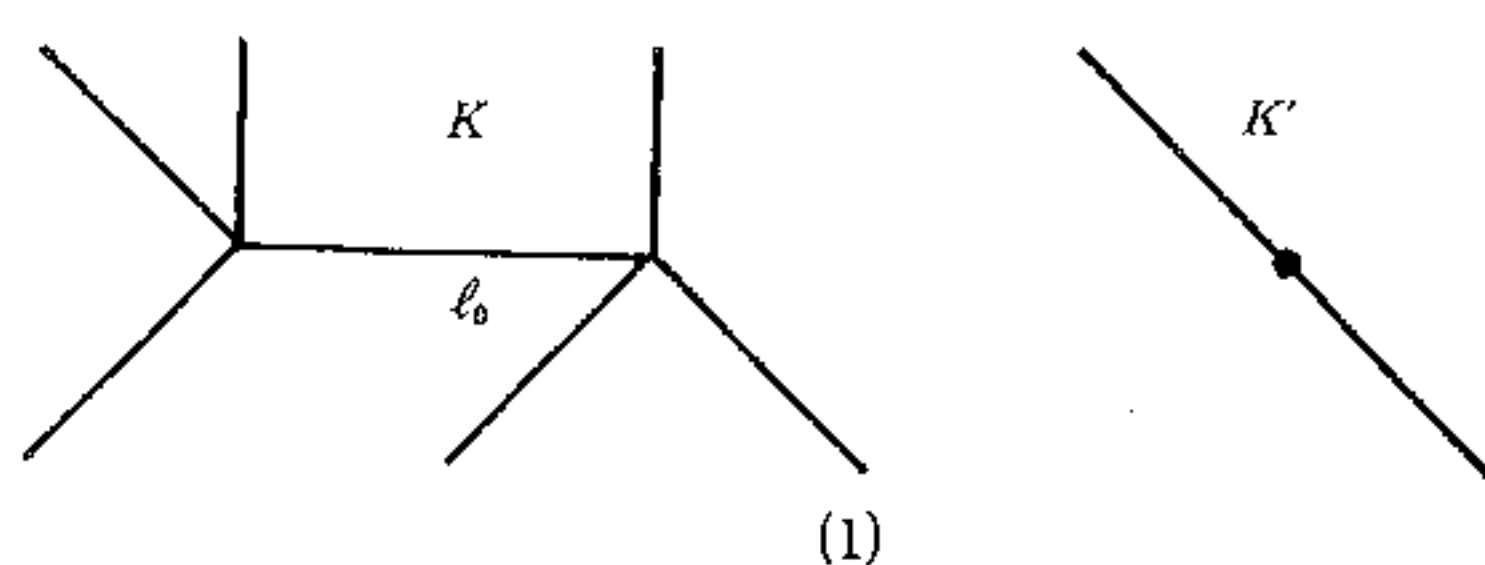


図12. 7

得られない。従って定理より、(3)の ι は K の実現にはならない。残り 6 つも同じように調べると、(2)の ι とその裏 $\bar{\iota}$ のだけが K の実現となる。

13. まとめ

1 点から放射状に延びた平坦条件を満たす折り線にどのように山谷をつければ平坦に折りたたむ事ができるか考え、定理 11.4 を得た。頂点が 2 個ある平坦折り紙に対しては、定理 12.3 により、1 点の平坦折り紙に帰着することができた。しかし残念ながら、頂点数が 3 以上の場合は 2 点の場合のようにすっきりとまとめることができていない。当然、一般の折り紙の折り線の山谷の構造は、結晶折り紙や例 2.4 のようなものを除くとほとんど分かっていない。

14. ブロック折り紙

図 14.1 のような切り込みの入ったプラスチックの玩具を御存知であろうか。切り込みを互いに噛み合わせて様々な立体を作ることができる。この頃は「LEGO」や「リブロック」のような組み合わせ玩具があり、ロボットや飛行機と自由自在に作ることができる。洗濯ばさみも、互いに噛み合わせることができるので、このような玩具の代用になる。

折り紙の世界にも、これに似たものがある。ユニット折り紙である。蘭部氏によって考え出された「カラーボックス」は、今では折り鶴ややっこさんのような伝承作品同様、広く普及している。近年、布施知子さんの登場によって、ユニット折り紙は急速に発展し、世界各国でユニークな作品が数多く生み出されるようになってきた([1]—[6], [13], [17]—[32])。[9] の分子模型用の折り紙もユニット折

り紙のひとつである。

ほとんどのユニット折り紙は幾何学的な立体を作るために考え出されている。もちろん、「REGO」に近いものもある。エドワード・サリバンさんの作品「こまどり城」は好みの形にお城を組み立てることができるユニット折り紙である(写真 14.3 ②, [28])。

写真 14.3 を見ていただきたい。①, ③, ④ はそれぞれ、パルテノン神殿北側、西側、南側、⑤, ⑥ はローマのコロッセウム(制作途中)であるこれは図 14.2 A ⑦ を基本に組み立てたものである。このブロックは図 14.2 A のように、極めて簡単な 4 つの部品からなる。このブロックを縦方向につなぐには、継ぎ手 B ③ を B ④ のようにブロック A ⑦ に差し込めばよい。横方向につなぐには、継ぎ手 C ④ を C ⑤ のようにブロック A ⑦ に差し込む。写真の作品は、この他に数種類のブロックを使って組み立てられているが、いずれもブロック A ⑦ を少し変形しただけである。

ちなみに、コロッセウムは正方形の紙を 2 万枚以上使い、のり無しで組み立てたものである。これらのブロックについては、別の機会で詳しく解説したい。

パルテノン神殿やコロッセウムの制作にあたって、本校の折り紙同好会、1 C, 1 M, 2 E, 2 S の学生諸君の協力を得た。ここに感謝する。

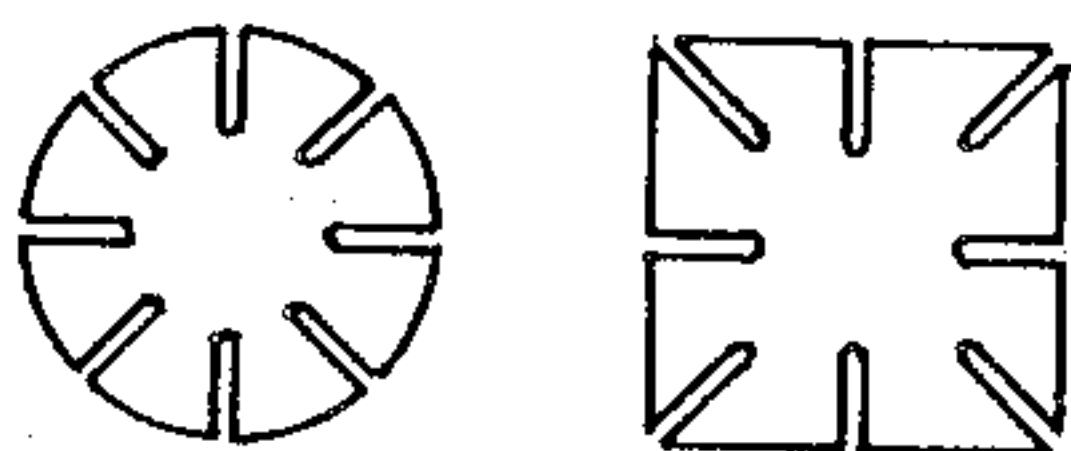


図 14.1

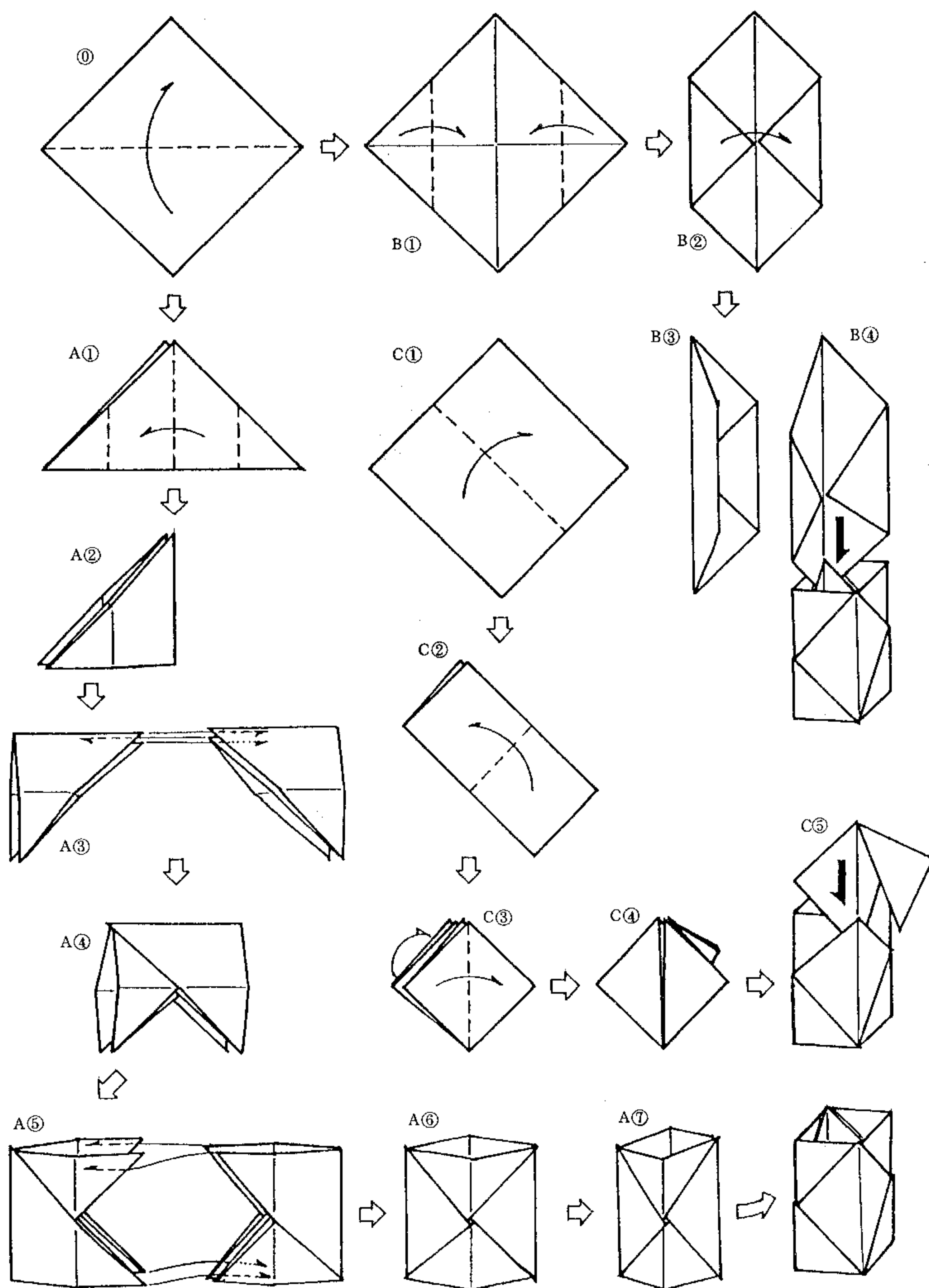
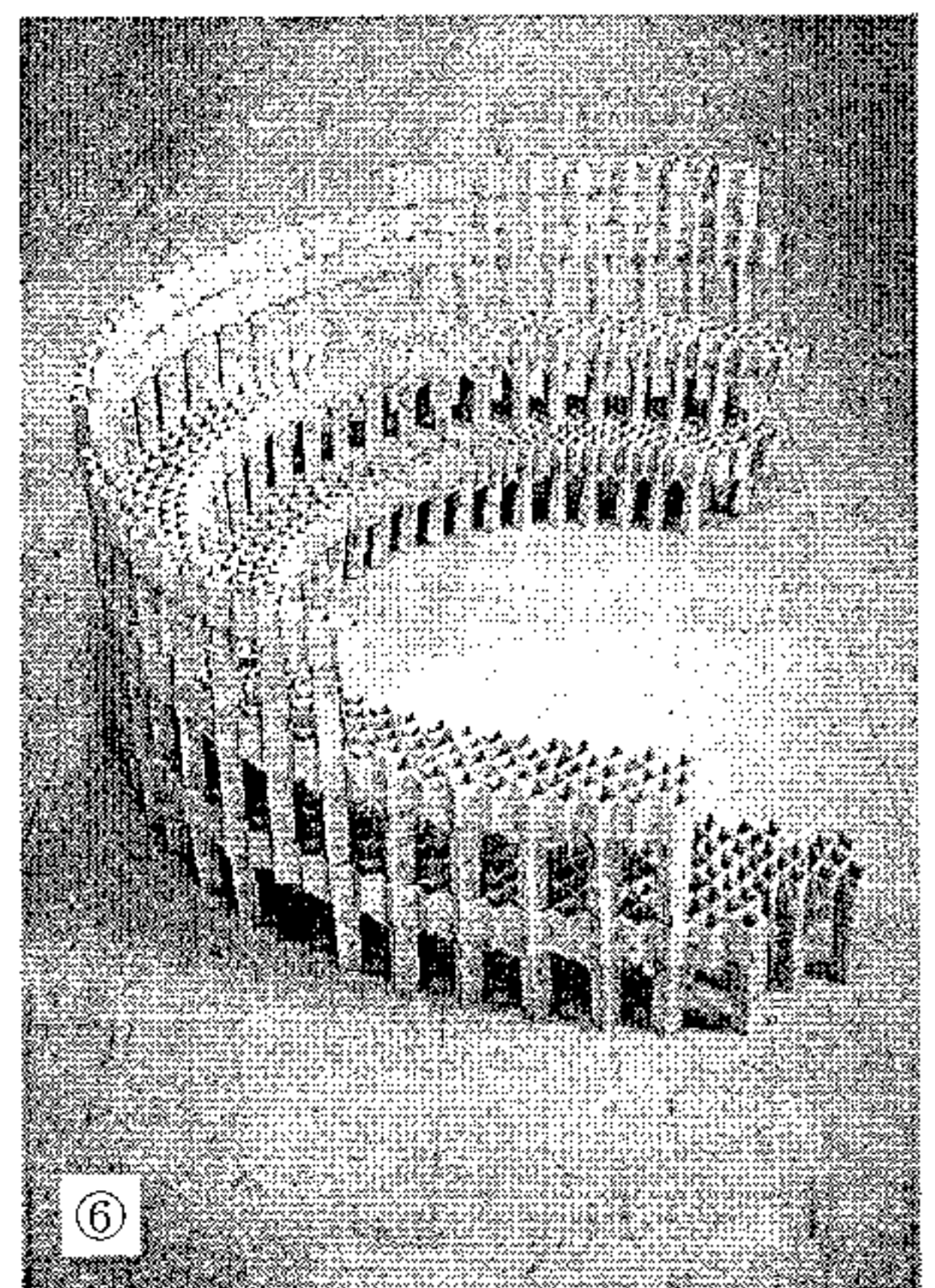
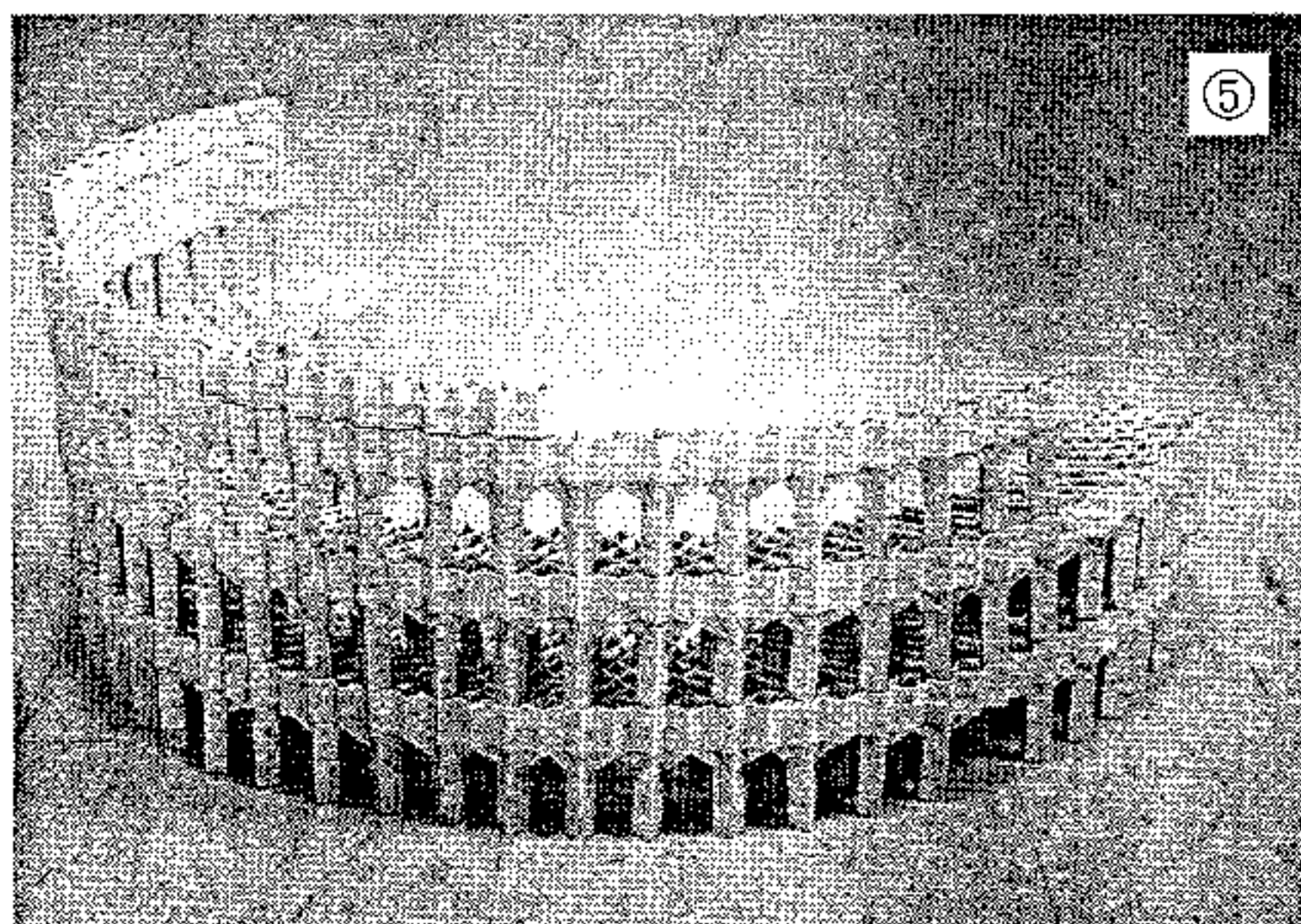
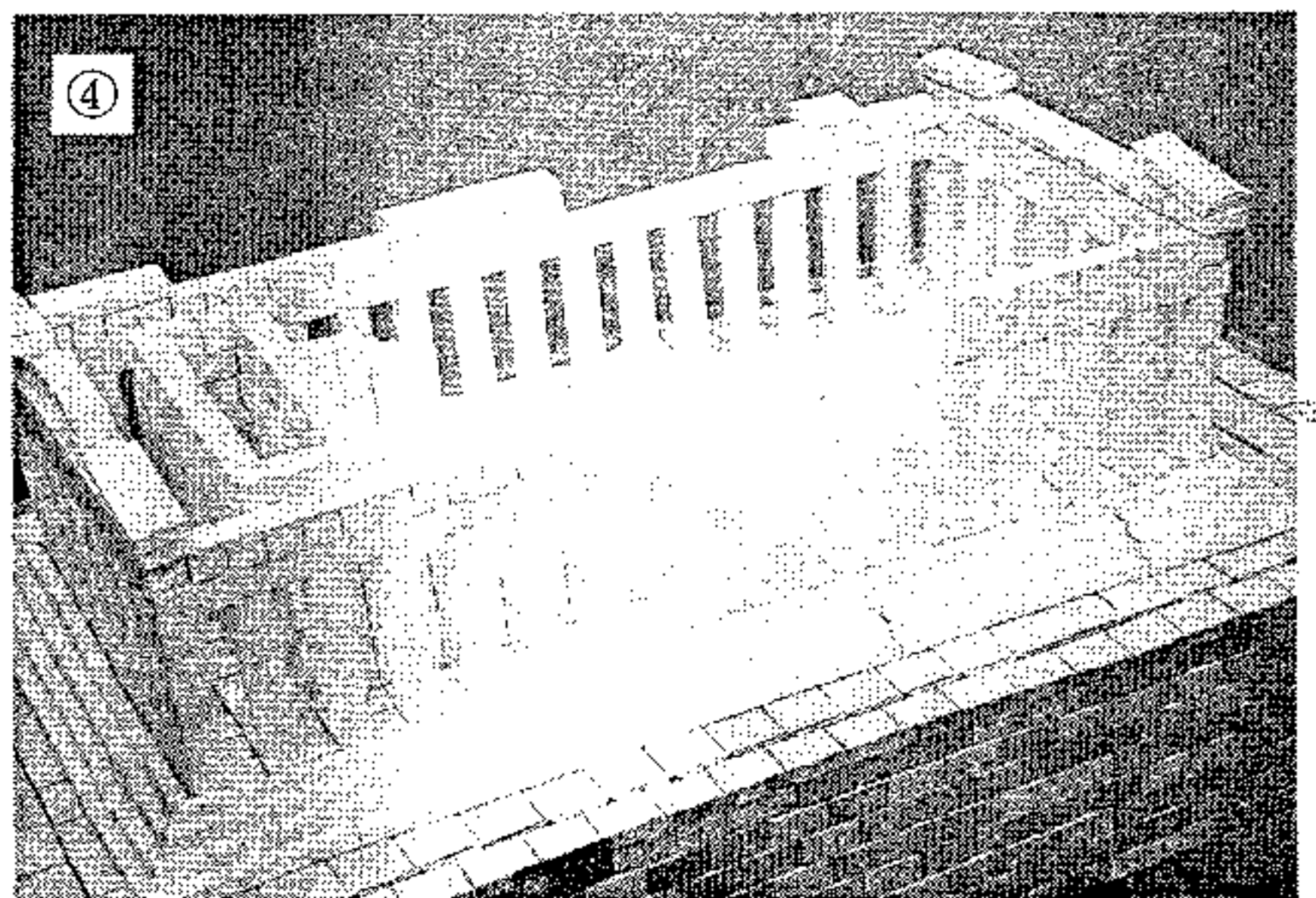
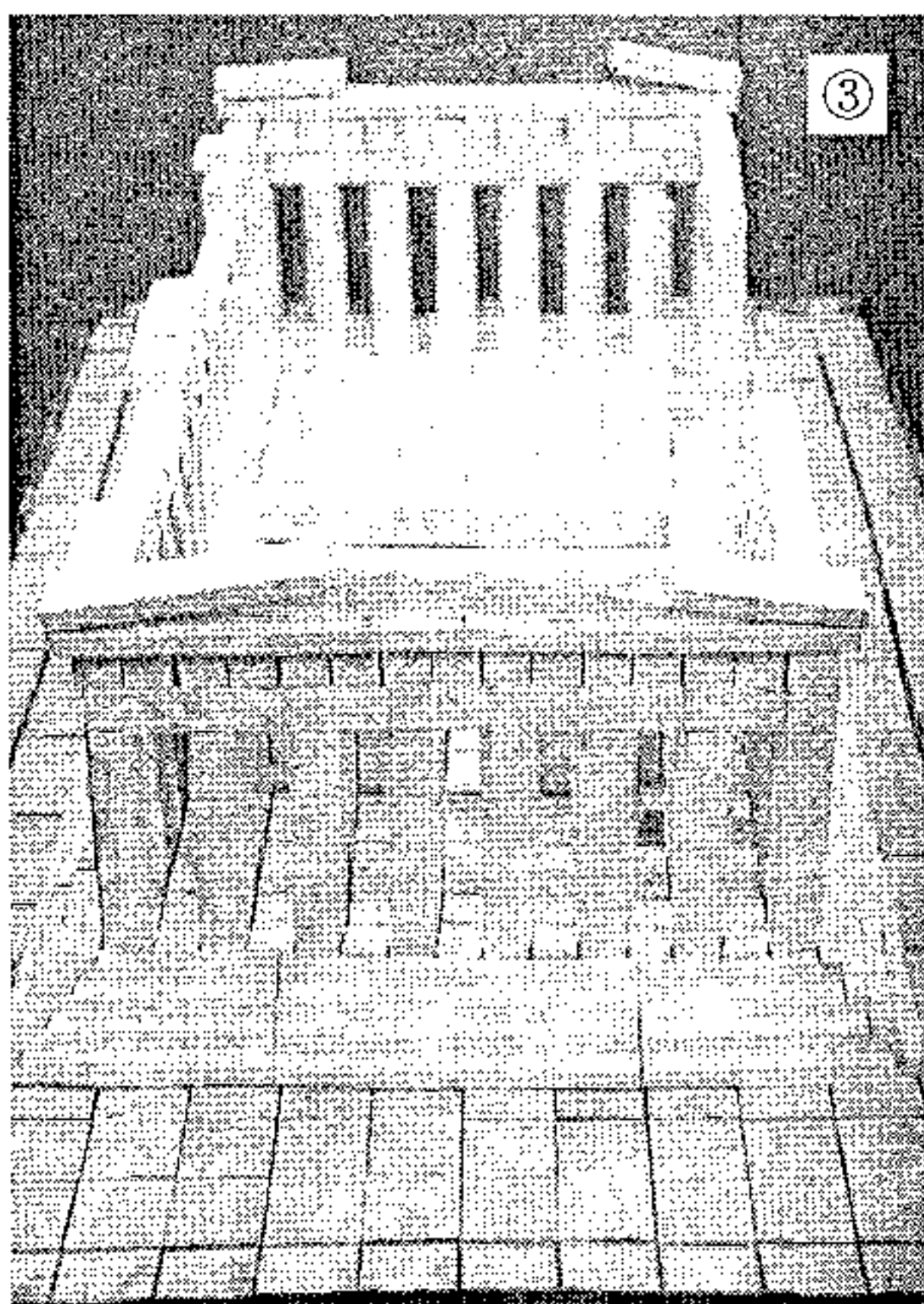
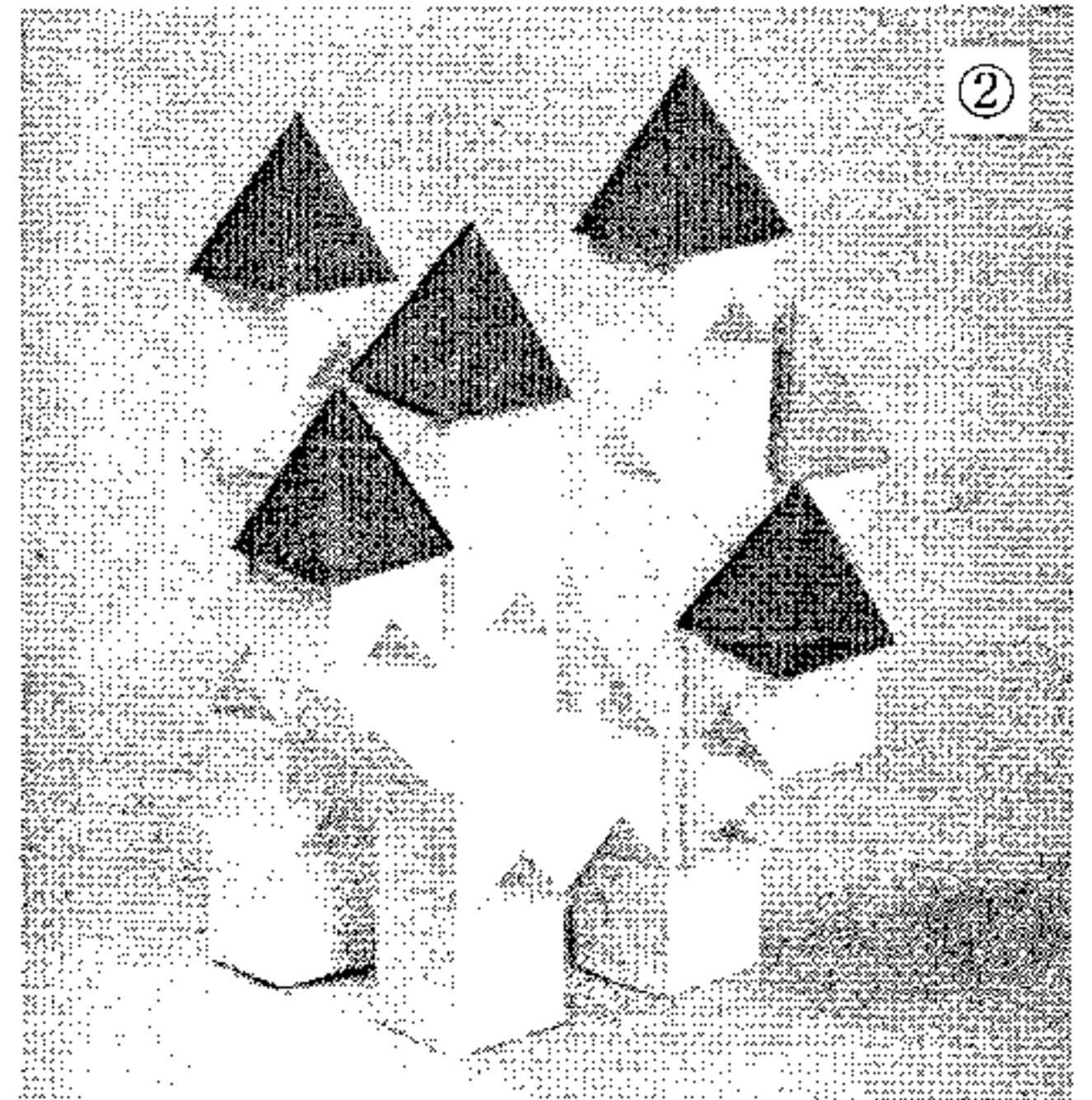
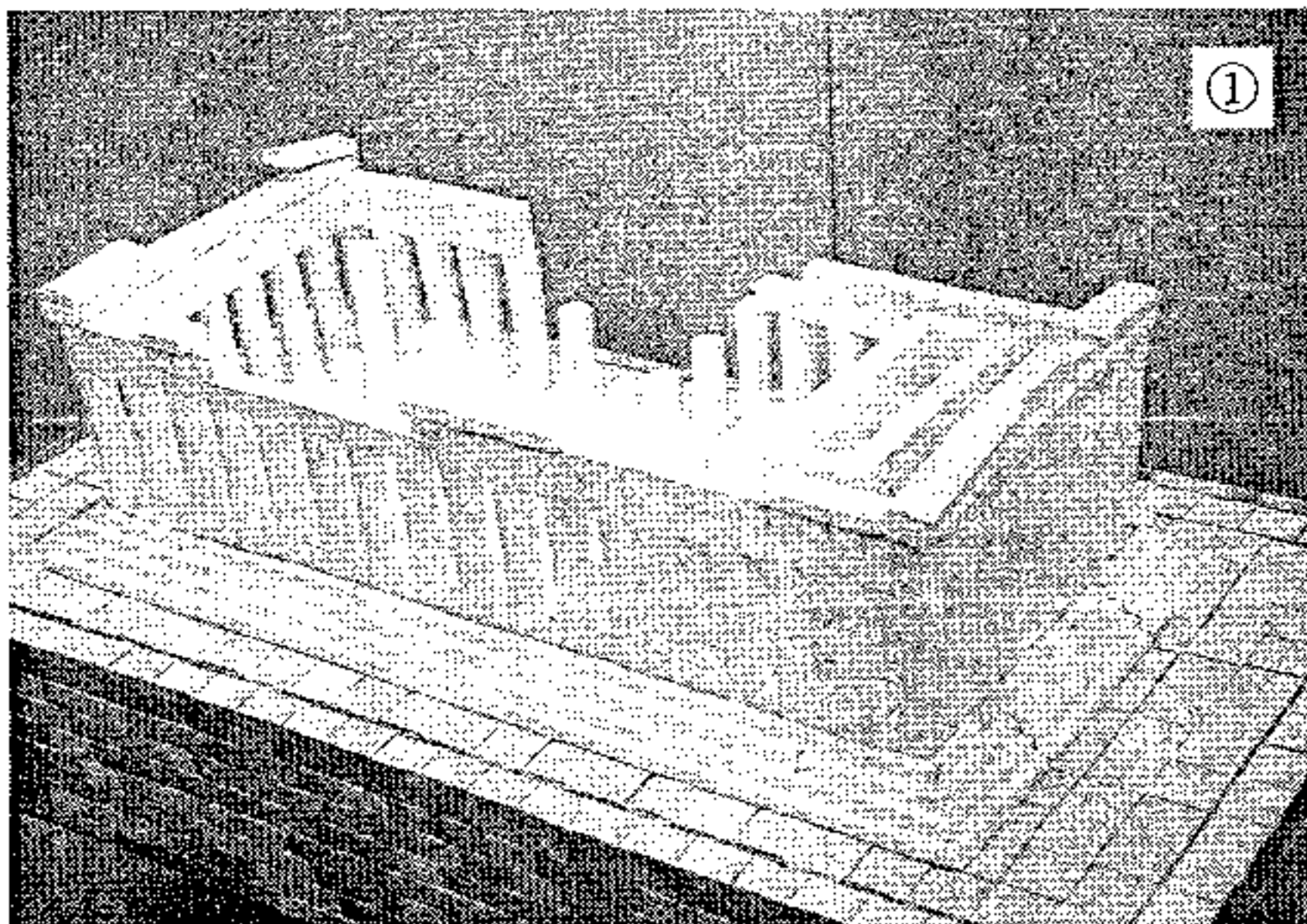


図14. 2



②「コマドリ城」，エドワード・サリバン作，布施 [28]より
⑤⑥ 3 E 富永尚君，1 E 前川知枝さん，筆者の共同制作

参考文献

- [1] 笠原邦彦,『超難解／マニア向き作品集』(おりがみ3),すばる書房(1976).
- [2] 笠原邦彦,『ユニットの世界』(アイデアいっぱいおりがみシリーズ No.5),サンリオ(1978)
- [3] 笠原邦彦,『4つのたのしみ』(アイデアいっぱいおりがみシリーズ No.6),サンリオ(1978).
- [4] 笠原邦彦,『折り紙図形パノラマ』(小学館入門百科シリーズ139),すばる書房(1984).
- [5] 笠原邦彦,『トップおりがみ』,サンリオ(1985).
- [6] 笠原邦彦,『折り紙／夢織り幾何学のすべて』日貿出版社(1988).
- [7] 川崎敏和,「結晶折紙」,佐世保工業高等専門学校研究報告,第23号(1986),91—99.
- [8] 川崎敏和,「立体的な結晶折り紙について」,佐世保工業高等専門学校研究報告,第24号(1987),101—109.
- [9] 川崎敏和,「ユニット折り紙と分子模型」,佐世保工業高等専門学校研究報告,第25号(1988),179—186.
- [10] 川崎敏和,「高次元の平坦折り紙について」,佐世保工業高等専門学校研究報告,第25号(1988),187—195.
- [11] 川崎敏和,「折り紙と数学—紙を平たく折りたたむ」,数研通信, No.5 (1989), 1—5.
- [12] 川崎敏和,「2次元球面の平坦折り紙について」,佐世保工業高等専門学校研究報告,第26号(1989),49—61.
- [13] 日本折り紙協会,『みんなくすだま』,世界文化社(1988).
- [14] 伏見康治,伏見満江,『折り紙の幾何学』,日本評論社.
- [15] 藤本修三,『創造性を開発する立体折り紙』,新写植出版(1976).
- [16] 藤本修三,『創造する折り紙遊びへの招待』,朝日カルチャーセンター(1982).
- [17] 布施知子,『箱をたのしむ』,筑摩書房(1987).
- [18] 布施知子,『ユニットあらかると』,同上.
- [19] 布施知子,『生長する立体』,同上.
- [20] 布施知子,『立体七変化』,同上.
- [21] 布施知子,『箱の百面相』,同上.
- [22] 布施知子,『箱をつくろう』,誠文堂新光社(1988).
- [23] 布施知子,『つかってあそぼう』,同上.
- [24] 布施知子,『立体をつくろう』,同上.
- [25] 布施知子,『長方形で折ろう』,同上.
- [26] 布施知子,『立体からくり』,同上.
- [27] 布施知子,『つないでつくろう』,同上.
- [28] 布施知子,『世界のユニットおりがみ』,同上.
- [29] 布施知子,『箱 自由自在 その1』,筑摩書房(1989).
- [30] 布施知子,『箱 自由自在 その2』,同上.
- [31] 布施知子,『ひし形立体とおもしろ Box』,同上.
- [32] 布施知子,『立体万華鏡』,同上.
- [33] 桃谷好英,『折り紙入門』,西東社.
- [34] T. Kawasaki & M. Yoshida, Crystallographic Flat Origamis, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ., 43 (1988), 153—157.